偏微分方程 2

孙天阳

中国科学技术大学数学科学学院

tysun@mail.ustc.edu.cn

2024 年 11 月 9 日

目录

0.1 绪论

- $f(t)$ 在 $t_0\in I$ 达到最大值 $\Longrightarrow f'(t_0)=0, f''(t_0)\leqslant 0$

  $f(x)$ 在 $x_0\in\Omega\subset\mathbb{R}^n$ 达到最大值, 则 $g(t)=f(x_0+tv)$ 在 $t=0$ 处达到最大值

  $0=g'(0)=\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)v_i \overset{\text{由}v\text{任意性}}{\Longrightarrow} \nabla f(x_0)=0$

  $0\geqslant g''(0)=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(x_0)v_iv_j\Longrightarrow D^2f(x_0)\leqslant 0$

  找 f, 占百分之五十

- $\displaystyle\int_a^b f'(t)\mathrm{d}t=f(b)-f(a)$

  $\Omega\subset\mathbb{R}^n,\partial\Omega\in C^1,\displaystyle\int_\Omega \operatorname{div}\vec{X}\mathrm{d}x=\int_{\partial\Omega}\vec{X}\cdot\nu\mathrm{d}\sigma$

  定义 0.1.1. 任意 $x_0\in\Omega$,$\partial\Omega\cap B_\varepsilon(x_0)$ 可以写成 $x_n=\varphi(x'),x'\in\mathbb{R}^{n-1},|x'|<\dfrac{\varepsilon}{2}$,$\varphi\in C^1$

  找 $\vec{X}$, 另外百分之五十

- 找到 $f,\vec{X}\Longrightarrow$ 解的估计 $\overset{\text{泛函分析}}{\Longrightarrow}$ 解的存在性和性质

讲课计划

- 1-4 周
  - 分析准备：初步不等式, 卷积, 截断函数, 单位分解
  - 回忆调和函数：平均值性质（含参变量积分）,Green 表示（Ω 为球）（处理奇点）, 梯度估计（来自平均值公式的梯度内估计, 对数梯度估计, 边界梯度估计（助教讲））（$\Longrightarrow$ 调和函数实解析）
  - 线性椭圆方程的极值原理（弱；强：在内部达到极大则为常值）

  但在数学分析的框架中, 存在性的要求很高：$\partial\Omega\in C^{2,\alpha}$, $f\in C^\alpha$

- 5-8 周,Sobolev 空间

  为了处理

  $$\begin{cases}\Delta u=f & \text{in } \Omega\subset\mathbb{R}^n\\ u=\varphi & \text{on } \partial\Omega\end{cases}$$

  其中 Ω 为有界区域,$f\in L^2(\Omega)$,φ,Ω 没有好的光滑性

  可以“求导”的 L^p 空间,L^p 足够大, 可以求导足够小, 所以刚好能证明弱解的存在唯一性

  逼近：$C_0^\infty(\Omega)$（卷积）,$C^\infty(\Omega)$（单位分解）,$\mathbb{C}^\infty(\overline{\Omega})$（单位分解）

  延拓：能否延拓到边界上

  限制：需要赋予限制的意义

  Sobolev 不等式、Morrey 不等式（都是由牛顿莱布尼茨公式来证）

  紧嵌入定理

  差商

- 9-14 周, 散度型（线性）椭圆方程
  - 存在性（变分法, 下半连续性；Lax-Milgram,Fredholm 二择一）
  - 正则性, 找 $\vec{X}$（能量法）
    特征值, 特征函数, 紧算子的 Hilbert-Schmidt 定理
- 15-16 周, 抛物方程
  - 存在性,Galerkin 逼近, 收敛性

  双曲方程

0.1.1 参考书

- 准备工作
  - DiBenedetto 分析学：实变函数,Sobolev 空间
  - Tartar：Sobolev 空间
- Han-Lin ch1-ch2：调和函数 + 极值原理, 如何找 $f(x)$
- 椭圆方程
  - 偏微分方程的 L^2 理论
  - Evans ch6：找 $\vec{X}$
  - Han-Lin ch4：找 $\vec{X}$
- 抛物方程：陈亚浙
- 双曲方程：Alinal
- M.Taylor 偏微分方程 I

Chapter 1

调和函数

1.1 平均值公式

定理 1.1.1. 设 $u \in C^2(U), \Delta u = 0, U \subset \mathbb{R}^n$ 为有界区域. 那么对任意 $x_0 \in U$,$B_\varepsilon(x_0) \subset\subset U$, 满足

$$u(x) = \frac{1}{|B_\varepsilon(x_0)|}\int_{B_\varepsilon(x_0)} u(x)\mathrm{d}x = \fint_{\partial B_\varepsilon(x_0)} u(x)\mathrm{d}\sigma.$$

证明.

$$\begin{aligned}
\int_{B_r(x_0)} f(x)\mathrm{d}x &\xlongequal{z\in\partial B_t(0)} \int_0^r \int_{\partial B_t(0)} f(x_0+z)\mathrm{d}\sigma_{\partial B_t}\mathrm{d}t \\
&\xlongequal[\mathrm{d}\sigma_{\partial B_t}=t^{n-1}\mathrm{d}\sigma_{S^{n-1}}]{z=t\omega} \int_0^r t^{n-1}\int_{\partial B_1(0)} f(x_0+t\omega)\mathrm{d}\sigma_{S^{n-1}}\mathrm{d}t \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\int_{B_r(x_0)} f(x)\mathrm{d}x &= r^{n-1}\int_{\partial B_1(0)} f(x_0+r\omega)\mathrm{d}\sigma_{S^{n-1}} = \int_{\partial B_r(x_0)} f(x)\mathrm{d}\sigma
\end{aligned}$$

设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$,$u \in C^2(\Omega)$,$\Delta u = 0$,$B_r(x_0) \subset\subset \Omega$,$0 < \rho < r$.

$$\begin{aligned}
0 = \int_{B_\rho(x_0)} \Delta u(x)\mathrm{d}x &\xlongequal{\text{散度定理}} \int_{\partial B_\rho(x_0)} \frac{\partial u}{\partial \nu}\mathrm{d}\sigma \\
&\xlongequal{(1)} \int_{\partial B_\rho(x_0)} \frac{\partial u}{\partial \rho}(x)\mathrm{d}\sigma = \rho^{n-1}\int_{\partial B_1(0)} \frac{\partial u}{\partial \rho}(x_0+\rho\omega)\mathrm{d}\sigma_{S^{n-1}}
\end{aligned}$$

$$(1)\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = \frac{\partial u}{\partial x_i}\nu_i = \frac{\partial u}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial x_i}\cdot\frac{(x-x_0)_i}{\rho} \xlongequal{(2)} \frac{\partial u}{\partial \rho}$$

$$(2)\ \rho^2 = (x-x_0)^2 \Longrightarrow 2\rho\frac{\partial \rho}{\partial x_i} = 2(x-x_0)_i \Longrightarrow \frac{\partial \rho}{\partial x_i} = \frac{(x-x_0)_i}{\rho}$$

$$\begin{aligned}
&0 = \int_{\partial B_1(0)} \frac{\partial u}{\partial \rho}(x_0+\rho\omega)\mathrm{d}\sigma_{S^{n-1}} = \frac{\partial}{\partial \rho}\int_{\partial B_1(0)} u(x_0+\rho\omega)\mathrm{d}\sigma_{S^{n-1}}, \forall\ 0<\rho<r \\
&\Longrightarrow \int_{\partial B_1(0)} u(x_0+\rho\omega)\mathrm{d}\sigma_{S^{n-1}} \xlongequal{\text{取}\rho=0} \int_{\partial B_1(0)} u(x_0)\mathrm{d}\sigma = |S^{n-1}|u(x_0) \\
&\Longrightarrow u(x_0) = \frac{1}{|S^{n-1}|}\int_{\partial B_1(0)} u(x_0+\rho\omega)\mathrm{d}\sigma = \frac{1}{|\partial B_\rho(x_0)|}\int_{\partial B_\rho(x_0)} u(x)\mathrm{d}\sigma \\
&\Longrightarrow \rho^{n-1}u(x_0)|S^{n-1}| = \int_{\partial B_\rho(x_0)} u(x)\mathrm{d}\sigma
\end{aligned}$$

$$\xRightarrow{\text{积分}} \frac{r^n}{n}u(x_0)|S^{n-1}| = \int_{B_r(x_0)} u(x)\mathrm{d}x$$
$$\Longrightarrow u(x_0) = ⨍_{B_r(x_0)} u(x)\mathrm{d}x \qquad \square$$

注记. *20 世纪 60 年代知道热方程* $u_t = \Delta u$ *也有平均值性质.*

2 月 21 日 42 分 48 秒

作业 1.1.2. 设 $U \subset \mathbb{R}^m$,$u \in C^3(U) \cap C^1(\overline{U})$,$\Delta u = 0$,

(1) 若 $u \neq 0$, 设 $\varphi = \dfrac{|\nabla u|^2}{u^p}$, 其中 $p = \dfrac{2(n-1)}{n-2}$,$n \geqslant 3$, 证明 $\Delta\varphi \geqslant 0$.

(2) 若 $|\nabla u| \neq 0$, 设 $\varphi = \dfrac{2u_1u_2u_{12} - u_2^2u_{11} - u_1^2u_{22}}{|\nabla u|^4}$, 证明 $\Delta\varphi \equiv 0$.

等温面的曲率

例 1.1.3. $D(r) = \int_{B_r(0)} |\nabla u|^2\mathrm{d}x$, 那么

$$rD'(r) = (n-2)\int_{B_r(0)} |\nabla u|^2\mathrm{d}x + 2r\int_{\partial B_r(0)} \left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2 \mathrm{d}\sigma.$$

证明. $D'(r) = \int_{\partial B_r(0)} |\nabla u|^2\mathrm{d}\sigma$

$$rD'(r) = r\int_{\partial B_r(0)} |\nabla u|^2\mathrm{d}\sigma \xlongequal[r^2=\sum x_i^2]{\nu_i=\frac{x_i}{r}} \int_{\partial B_r(0)} x_i\nu_i|\nabla u|^2\mathrm{d}\sigma \xlongequal{\vec{X}=|\nabla u|^2x} \int_{B_r(0)} \mathrm{div}(|\nabla u|^2x)\mathrm{d}V$$
$$\left(|\nabla u|^2x_i\right)_i = (|\nabla u|^2)_i x_i + n|\nabla u|^2 = 2x_iu_ju_{ij} + n|\nabla u|^2$$
$$2x_iu_ju_{ij} = 2(x_iu_ju_i)_j - 2\delta_{ij}u_ju_i - 2x_iu_{jj}u_i \xlongequal{\Delta u=0} 2(x_iu_iu_j)_j - 2|\nabla u|^2$$
$$rD'(r) = \int_{B_r(0)} \left(|\nabla u|^2x_i\right)_i \mathrm{d}V = n\int_{B_r(0)} |\nabla u|^2\mathrm{d}V + 2\int_{B_r(0)} (x_iu_iu_j)_j\mathrm{d}V - 2\int_{B_r(0)} |\nabla u|^2\mathrm{d}V$$
$$= (n-2)\int_{B_r(0)} |\nabla u|^2\mathrm{d}V + 2\int_{\partial B_r(0)} x_iu_iu_j\nu_j\mathrm{d}\sigma_r \xlongequal{x_i=r\nu_i} (n-2)\int_{B_r(0)} |\nabla u|^2\mathrm{d}x + 2r\int_{\partial B_r(0)} \left(\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)^2 \mathrm{d}\sigma_r \qquad \square$$

例 1.1.4. $H(r) = \int_{B_r(0)} u^2\mathrm{d}\sigma_r = r^{n-1}\int_{\partial B_1(0)} u^2(r\omega)\mathrm{d}\sigma_1$

$$\begin{aligned} H'(r) &= (n-1)r^{n-2}\int_{\partial B_1(0)} u^2(r\omega)\mathrm{d}\sigma_1 + r^{n-1}\int_{\partial B_1(0)} 2u\frac{\partial u(r\omega)}{\partial r}\mathrm{d}\sigma_1 \\ &= (n-1)r^{n-2}\int_{\partial B_1(0)} u^2(r\omega)\mathrm{d}\sigma_1 + 2r^{n-1}\int_{\partial B_1(0)} uu_\nu\mathrm{d}\sigma_1 \\ &= \frac{n-1}{r}\int_{\partial B_r(0)} u^2\mathrm{d}\sigma_r + 2\int_{\partial B_r(0)} uu_\nu\mathrm{d}\sigma_r \end{aligned}$$

作业：$N(r) = \dfrac{rD(r)}{H(r)}$, $H'(r) \geqslant 0$Algrem 频率函数

作业：$\Delta u = 0, |\nabla u| \neq 0, 0 < u < 1, u = 1\partial\Omega, \Sigma_t = \{u = t\}, 0 < t < 1$

$\varphi(t) = t^{-2}\int_{u=t} |\nabla u|^2\mathrm{d}\sigma$ 证单增

Ω 任意有界区域

u 是静电场的电势,Ω 是带电导体

提示,$u = |x|^{-1}$,

1.2 Poisson 积分公式

1.3 平均值公式的应用

设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是区域,$u \in C(\overline{\Omega})$,$\Delta u = 0$,$B_r(x_0) \subset\subset \Omega$,

$$u(x_0) = \fint_{\partial B_r(x_0)} u(x)\mathrm{d}\sigma = \fint_{B_r(x_0)} u(x)\mathrm{d}x.$$

1.3.1 强极值原理

定理 1.3.1 (强极值原理)**.** *如果 u 在 $x_0 \in \Omega$ 达到最大(小)值 M, 则 $u \equiv M$.*

证明. 连通性论证. □

1.3.2 梯度内估计

$$\Delta u = 0 \Longrightarrow \Delta u_i = 0 \Longrightarrow u_i(x_0) = \fint_{B_r(x_0)} u_i(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{|B_r(x_0)|}\int_{\partial B_r(x_0)} u\nu_i \mathrm{d}\sigma_r$$

$$|u_i|(x_0) \leqslant \frac{|\partial B_r(x_0)|}{|B_r(x_0)|}\sup_{\partial B_r(x_0)}|u| \overset{(1)}{=\!=} \frac{n}{r}\sup_{\partial B_r(x_0)}|u|$$

$$(1)\ |B_r(x_0)| = \frac{r^n}{n}|S^{n-1}|, |\partial B_r(x_0)| = r^{n-1}|S^{n-1}|$$

$$|\nabla u|^2(x_0) = \sum |u_i|^2(x_0) \leqslant n\left(\frac{n}{r}\sup_{\partial B_r(x_0)}|u|\right)^2$$

$$|\nabla u|(x_0) \leqslant \frac{1}{r}n^{\frac{3}{2}}\sup_{\partial B_r(x_0)}|u| = \frac{1}{r}n^{\frac{3}{2}}\sup_{B_r(x_0)}|u|$$

若 $u \geqslant 0$,$|u_i|(x_0) \overset{\nu_i \leqslant 1}{\leqslant} \frac{1}{|B_r(x_0)|}\int_{\partial B_r(x_0)} u\mathrm{d}\sigma_r = \frac{n}{r}u(x_0)$

推论 1.3.2 (Liouville 定理)**.** *若 u 为 $\mathbb{R}^n$ 上的上(下)有界调和函数, 则 u 为常数.*

证明. 不妨设 u 为下有界调和函数, 否则考虑 $-u$.

不妨设 $u > 0$, 否则考虑 $u + c$, 其中 c 为充分大的一个常数.

由梯度内估计, 任意固定 $x_0 \in \mathbb{R}^n$, 由梯度内估计,

$$|u_i|(x_0) \leqslant \frac{n}{r}u(x_0), \quad 1 \leqslant i \leqslant n, \forall\ r > 0.$$

令 $r \to +\infty$, 知 $\nabla u(x_0) = 0$. 由 x_0 任意性,$\nabla u \equiv 0$. 所以 u 为常数. □

1.4 定理另证

为了将上述三个定理：梯度内估计、Liouville 定理和极值原理推广到平均值公式不适用的一般情形, 我们寻求不依赖于平均值公式的其他证法.

1.4.1 弱极值原理

引理 1.4.1.
设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 为区域,$u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$,$\Delta u > 0$, 则 u 的最大值不可能在内部达到, 特别地,

$$\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u.$$

证明. 设 $x_0 \in \Omega$ 为最大值点, 进而为极大值点, 所以 $\Delta u(x_0) \leqslant 0$, 矛盾. □

当我们将条件修改为 $\Delta u \geqslant 0$ 时, 很明显我们不能再直接通过相同的论证得到“u 的最大值不可能在内部达到”的结果, 但在附加上 Ω 有界的条件后, 我们仍能得到 $\max\limits_{\overline{\Omega}} u = \max\limits_{\partial\Omega} u$.

定理 1.4.2 (弱极值原理)**.**
设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 为有界区域,$u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$,$\Delta u \geqslant 0$, 则

$$\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u.$$

证明. 我们的思路是构造一个辅助函数 φ, 满足

(1) $\Delta\varphi > 0$, 从而我们可以用上面的引理得到 $\max\limits_{\overline{\Omega}} \varphi = \max\limits_{\partial\Omega} \varphi$.

(2) φ 得跟 u 扯上点关系, 使得我们能够借助 φ 为桥梁建立起 $\max\limits_{\partial\Omega} u \geqslant \max\limits_{\overline{\Omega}} u$.

乍一看这似乎有些矛盾, 满足 $\max\limits_{\overline{\Omega}} \varphi \geqslant \max\limits_{\overline{\Omega}} u$ 或 $\max\limits_{\partial\Omega} \varphi \leqslant \max\limits_{\partial\Omega} u$ 的 φ 都不难构造, 但若想 φ 同时满足这两个条件, 就得要求 $\max\limits_{\partial\Omega} u = \max\limits_{\partial\Omega} \varphi, \max\limits_{\overline{\Omega}} \varphi = \max\limits_{\overline{\Omega}} u$, 这太苛刻了.

我们的做法是以退为进, 给不等式一个 ε 容度, 再令 ε 趋近于零, 迂回实现我们的目的.

设 $\varphi = u + \varepsilon x_1^2$, 让我们看看这个辅助函数.

- 首先,$\Delta\varphi = \Delta u + 2\varepsilon \geqslant 2\varepsilon > 0$, 满足我们的第一条要求.
- 其次, 在 $\overline{\Omega}$ 上有 $\varphi \geqslant u$, 这建立了 $\max\limits_{\overline{\Omega}} \varphi \geqslant \max\limits_{\overline{\Omega}} u$.
- 再次,$\max\limits_{\partial\Omega} \varphi = \max\limits_{\partial\Omega}(u + \varepsilon x_1^2) \leqslant \max\limits_{\partial\Omega} u + \varepsilon \max\limits_{\partial\Omega} x_1^2$.
- 最后, 合并两个不等式, 得到 $\max\limits_{\partial\Omega} u + \varepsilon \max\limits_{\partial\Omega} x_1^2 \geqslant \max\limits_{\overline{\Omega}} u$, 令 $\varepsilon \to 0^+$, 得证.

虽然我们已经证完了, 但请容许我再啰嗦两句, 让我们再仔细看看为了实现我们的目的 $f = x_1^2$ 必须满足什么样的要求

- $f \geqslant 0 \Longrightarrow \max\limits_{\overline{\Omega}} \varphi \geqslant \max\limits_{\overline{\Omega}} u$
- $\Delta f > 0 \Longrightarrow \max\limits_{\overline{\Omega}} \varphi = \max\limits_{\partial\Omega} \varphi$
- $\max\limits_{\partial\Omega} f$ 有限 + ε 技巧 $\Longrightarrow \max\limits_{\partial\Omega} \varphi \leqslant \max\limits_{\partial\Omega} u + \varepsilon c$

其中第三条实际上不是对 f 的要求, 而是对 Ω 的要求（这也是我们用到条件中 Ω 有界的地方）, 因为连续函数一定能够在紧集上达到最值.

因此我想说, 只要 f 满足 $f \geqslant 0$ 和 $\Delta f > 0$, 构造出来的 $\varphi = u + \varepsilon f$ 都能够作为辅助函数. □

1.4.2 整体梯度估计约化到边界梯度估计

设 $u \in C^1(\overline{\Omega}) \cap C^3(\Omega), \Delta u = 0$.

则 $\Delta|\nabla u|^2 = 2\sum u_{ij}^2 + 2\sum u_j u_{jii} \xlongequal{\Delta u=0} 2\sum u_{ij}^2 \geqslant 0 \Longrightarrow |\nabla u|$ 最大值在 $\partial\Omega$ 达到.

1.4.3 梯度内估计

令 $\xi = r^2 - |x|^2$,$\varphi = \xi^2|\nabla u|^2 + \alpha u^2$, 其中 α 为待定系数.

$\xi_i = -2x_i, \Delta\xi = -2n$.

$\varphi_i = (\xi^2)_i|\nabla u|^2 + \xi^2(|\nabla u|^2)_i + 2\alpha u u_i$

$\Delta\varphi = \xi^2\Delta|\nabla u|^2 + \Delta(\xi^2)|\nabla u|^2 + 2(\xi^2)_i(|\nabla u|^2)_i + 2\alpha|\nabla u|^2 + 2\alpha u\Delta u$

- $\xi^2\Delta|\nabla u|^2 = 2\xi^2\sum u_{ij}^2$
- $\Delta(\xi)^2 = (2\xi\xi_i)_i = 2|\nabla\xi|^2 + 2\xi\Delta\xi = 8|x|^2 - 4n\xi = 8|x|^2 - 4n(r^2 - |x|^2) = (4n+8)|x|^2 - 4nr^2$
- $2(\xi^2)_i(|\nabla u|^2)_i = 8\xi\xi_i u_j u_{ij} = 8(\xi u_{ij})(\xi_i u_j)$

  $-8(\xi u_{ij})(\xi_i u_j) = 4{\cdot}2(-\xi u_{ij})(\xi_i u_j) \leqslant 4{\cdot}\left(\frac{1}{\varepsilon}\xi^2\sum u_{ij}^2 + \varepsilon|\nabla\xi|^2|\nabla u|^2\right) = 2\xi^2\sum u_{ij}^2 + 8|\nabla\xi|^2|\nabla u|^2$

  $2\xi^2\sum u_{ij}^2 \geqslant -8(\xi u_{ij})(\xi_i u_j) - 8|\nabla\xi|^2|\nabla u|^2$

目标：找 α 充分大使得 $\Delta\varphi \geqslant 0$, 从而 φ 的最大值可在 $\partial B_r(x_0)$ 达到,

$$\alpha \sup_{\partial B_r(0)} |u|^2 = \sup_{\partial B_r(0)} \varphi = \sup_{B_r(0)} \varphi \geqslant \varphi(0) \geqslant r^4|\nabla u(0)|^2.$$

$\Delta\varphi \geqslant \left(2\alpha + \Delta(\xi^2) - 8|\nabla\xi|^2\right)|\nabla u|^2 \geqslant 0$

$2\alpha + 8|x|^2 - 4n\xi - 32|x|^2 = 2\alpha - 4n(r^2 - |x|^2) - 24|x|^2 = 2\alpha + 4(n-6)|x|^2 - 4nr^2 \geqslant 0$

$\alpha \geqslant -2(n-6)|x|^2 + 2nr^2 \leqslant 12|x|^2 + 2nr^2 \leqslant 12r^2 + 2nr^2 = 2(n+6)r^2$, 取 $\alpha = 2(n+6)r^2$

所以 $r^4|\nabla u(0)|^2 \leqslant 2(n+6)r^2 \sup_{\partial B_r(0)} |u|^2 \Longrightarrow |\nabla u(0)| \leqslant \dfrac{\sqrt{2(n+6)}}{r} \sup_{B_r(0)} |u|$

1.4.4 对数梯度估计与 Harnack 不等式

命题 1.4.3. $\Omega \subset \mathbb{R}^n$,$u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$,$\Delta u = 0$,$u > 0$,$B_r(0) \subset\subset \Omega$.

目标：证明 $\sup\limits_{B_{\frac{r}{2}}(0)} |\nabla \log u| \leqslant \dfrac{c_n}{r}$.

证明. 令 $v = \log u$,$u = \mathrm{e}^v$,$u_i = \mathrm{e}^v v_i$, $\Delta u = \mathrm{e}^v(|\nabla v|^2 + \Delta v) = 0 \Longrightarrow \Delta v = -|\nabla v|^2 (*)$

令 $\varphi = \xi^2 |\nabla v|^2$. 设 φ 在 x_0 处达到极大, 要利用 $\varphi_i(x_0) = 0$ 和 $\Delta\varphi(x_0) \leqslant 0$ 给出 $\varphi(x_0)$ 的估计.

注记. 有趣的是, 初学时, 我根本没有想过这里为什么要用 $\Delta\varphi(x_0) \leqslant 0$, 而不是其他的什么东西.

事实上, 若 φ 在 x_0 处达到极大, 则有 $D^2\varphi(x_0)$ 半负定, 而 $\Delta\varphi(x_0) \leqslant 0$ 不过是推论.

之所以要用 $\Delta\varphi(x_0) \leqslant 0$, 是因为 u 满足的方程是 $\Delta u = 0$, 从而 v 满足关系 $\Delta v = -|\nabla v|^2$. 为了能充分利用这个关系, 从而做一些化简, 我们才选择了 $\Delta\varphi(x_0) \leqslant 0$.

在后面, 我们证明椭圆方程 $\sum a_{ij} u_{ij} = 0$ 的对数梯度估计时, 同样选取辅助函数 $\varphi = \xi^2 |\nabla v|^2$, 但我们要利用的条件就变成了 $\sum a_{ij}\varphi_{ij} \leqslant 0$, 我就是从那里体会到这一点的.

- $\varphi_i = 2\xi\xi_i|\nabla v|^2 + \xi^2(|\nabla v|^2)_i = 0 \Longrightarrow \xi(|\nabla v|^2)_i = -2\xi_i|\nabla v|^2 (\star)$
- $\Delta\varphi = \xi^2\Delta|\nabla v|^2 + \Delta(\xi^2)|\nabla v|^2 + 2(\xi^2)_i|\nabla v|^2_i$

$$(1)\ \ \Delta|\nabla v|^2 = 2(v_j v_{ji})_i = 2v_{ij}^2 + 2v_j(\Delta v)_j \overset{(*)}{=\!=\!=} 2v_{ij}^2 - 2v_j(|\nabla v|^2)_j$$

$$\xi^2\Delta|\nabla v|^2 = 2\xi^2 v_{ij}^2 - 2\xi v_j \xi(|\nabla v|^2)_j \overset{(\star)}{=\!=\!=} 2\xi^2 v_{ij}^2 + 4\xi\xi_j v_j |\nabla v|^2$$

$$(3)\ \ 2(\xi^2)_i(|\nabla v|^2)_i = 4\xi\xi_i(|\nabla v|^2)_i \overset{(\star)}{=\!=\!=} -8|\nabla\xi|^2|\nabla v|^2$$

$$\Delta\varphi = 2\xi^2 v_{ij}^2 + \left(4\xi\xi_i v_i + \Delta(\xi^2) - 8|\nabla\xi|^2\right)|\nabla v|^2$$

$$\sim \sum_{i,j=1}^n v_{ij}^2 \geqslant \sum_{i=1}^n v_{ii}^2 \overset{Cauchy}{\geqslant} \frac{1}{n}(\Delta v)^2 \overset{(*)}{=\!=\!=} \frac{1}{n}|\nabla v|^4$$

$$0 \geqslant \Delta\varphi \geqslant \frac{2}{n}|\nabla v|^4\xi^2 + 4\xi v_j\xi_j|\nabla v|^2 + \left(\Delta(\xi^2) - 8|\nabla\xi|^2\right)|\nabla v|^2$$

$$0 \geqslant \frac{2}{n}|\nabla v|^2\xi^2 + 4\xi v_j\xi_j + \Delta(\xi^2) - 8|\nabla\xi|^2$$

$$\frac{2}{n}\xi^2|\nabla v|^2 \leqslant -4\xi v_j\xi_j + 8|\nabla\xi|^2 - \Delta(\xi^2) \overset{Cauchy}{\leqslant} \frac{1}{n}\xi^2|\nabla v|^2 + 4n|\nabla\xi|^2 + 8|\nabla\xi|^2 - \Delta(\xi^2)$$

$$\frac{1}{n}\xi^2|\nabla v|^2(x_0) \leqslant 4n|\nabla\xi|^2 + 8|\nabla\xi|^2 - \Delta(\xi^2) = (12n+24)|x|^2 + 4nr^2 \leqslant (16n+24)r^2$$

$$\frac{9}{16}r^4 \sup_{B_{\frac{r}{2}(0)}} |\nabla v|^2 \leqslant \sup_{B_{\frac{r}{2}(0)}} (r^2 - |x^2|)^2|\nabla v|^2 = \sup_{B_{\frac{r}{2}(0)}} \varphi \leqslant \sup_{B_r(0)} \varphi \leqslant \varphi(x_0) \leqslant n(16n+40)r^2$$

$$\sup_{B_{\frac{r}{2}(0)}} |\nabla v|^2 \leqslant \frac{c_n}{r^2}$$

□

命题 1.4.4 (Harnack 不等式)**.** 设 $\Delta u = 0, u > 0$, 任意 $x, y \in B_{\frac{r}{2}(0)}$ 有,$u(x) \leqslant c_n u(y)$.

证明.

$$\begin{aligned}\log u(x) - \log u(y) &= \log u(tx + (1-t)y)\Big|_{t=0}^{t=1} \\ &= \int_0^1 \frac{\mathrm{d}\log u(tx+(1-t)y)}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^1 \frac{\partial \log u(tx+(1-t)y)}{\partial x_i}(x-y)_i \mathrm{d}t \\
|\log u(x) - \log u(y)| &\leqslant \int_0^1 \left| \frac{\partial \log u(tx+(1-t)y)}{\partial x_i}(x-y)_i \right| \mathrm{d}t \\
&\leqslant \sup_{B_{\frac{r}{2}(0)}} |\nabla \log u||x-y| \\
&\leqslant \frac{c_n}{r} \cdot r = c_n \\
u(x) &\leqslant \mathrm{e}^{c_n} u(y)
\end{aligned}
$$

□

注记. 若 $u \geqslant 0$, 令 $v = u + \varepsilon$, 则 $\Delta v = 0$ 且 $v > 0$, 满足上述定理条件, 再令 $\varepsilon \to 0$.

1.4.5 强极值原理

u 在 $x_0 \in \Omega$ 达到极大 M, 证 $u \equiv u(x_0) = M in \Omega$

$v = M - u$,$v(x_0) = 0, v \geqslant= 0, \Delta v = 0.$

2 月 24 日 18 分 56 秒

作业 1.4.5. 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$,$u$ 满足

$$
\begin{cases}
\Delta u = -2 & x \in \Omega \\
u = 0 & x \in \partial\Omega
\end{cases}.
$$

设 $\varphi = 2u \det u_{ij} + 2u_1u_2u_{12} - u_2^2u_{11} - u_1^2u_{22}$, 证明 $\Delta\varphi \leqslant 0$.

1.5 基本解

我们寻求 Laplace 方程 $\Delta u = 0$ 的径向对称解 $u(x) = v(r(x))$.

因为 r 本身在原点处是不可微的, 所以其实我们没有理由去希望一个 $\mathbb{R}^n$ 上的解.

当 $x \neq 0$ 时,$u_i = v'(r)\dfrac{x_i}{r}, u_{ii} = v''(r)\dfrac{x_i^2}{r^2} + v'(r)\left(\dfrac{1}{r} - \dfrac{x_i^2}{r^3}\right)$.

因此 $\Delta u = 0 \Longleftrightarrow v'' + \dfrac{n-1}{r}v' = 0$.

得到基本解

$$\Gamma(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi}\ln|x| & n = 2 \\ \dfrac{1}{(2-n)\omega_n}|x|^{2-n} & n \geqslant 3 \end{cases}$$

注意, 基本解满足的方程是 $\Delta\Gamma = \delta_0, x \in \mathbb{R}^n$.

事实上, 我们是存在一些在全空间上调和的函数的, 比如 $n = 2$ 时可以借助全纯函数构造.

但我们马上会发现, 反而是这个不在全空间上调和的函数 Γ, 会在我们后面建立理论时提供更大的帮助.

当 x

$$u(x) = \int_\Omega u(y)\Gamma(y-x)\mathrm{d}y$$

1.6 全空间无边界条件 Poisson 方程的经典解

1.7 Dirichlet 边值的 Poisson 方程经典解的存在性

考虑 Dirichlet 边值的 Poisson 方程

$$\begin{cases} \Delta u = f & x \in \Omega \\ u = \varphi & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

的解在不同意义下的存在性：

- 经典解, 即 $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, 对 f, φ, Ω 都加条件才能存在解.
- 弱解, 具体含义之后定义, 任意 Ω 解是存在的, 与物理实际吻合.

Green 表示

Green 表示是给出 Poisson 方程经典解的具体表达式的一种方式, 我们要做的事情大致是, 利用手头的信息, 即 Δu 在 Ω 上的值和 u 在 $\partial\Omega$ 上的值, 把 u 在 Ω 上的值表示出来. 下面让我们来做一些形式推导：

(1) 由基本解的定义, 我们知道

$$u(x) = \int_\Omega u(y)\Delta_y\Gamma(y-x)\mathrm{d}y.$$

(2) 结合第二格林公式

$$\int_\Omega u\Delta_y\Gamma(y-x) - \Delta u\Gamma(y-x)\mathrm{d}y = \int_{\partial\Omega} u(y)\frac{\partial\Gamma(y-x)}{\partial\nu} - \frac{\partial u}{\partial\nu}\Gamma(y-x)\mathrm{d}\sigma_y,$$

我们有

$$u(x) = \int_\Omega \Gamma(x-y)\Delta_y u(y)\mathrm{d}y - \int_{\partial\Omega}\left(\Gamma(x-y)\frac{\partial u}{\partial\nu}(y) - u(y)\frac{\partial\Gamma}{\partial\nu}(x-y)\right)\mathrm{d}\sigma_y.$$

我们成功避开了 u 在 Ω 上的信息, 并充分地利用了已有的条件, 但付出了一定的代价：引入了 u 的梯度在边界上的信息, 而这是未知的.

(3) 假如能找到 $\Phi(x,y)$ 满足

$$\begin{cases} \Delta_y\Phi(x-y) = 0 & \text{in } \Omega \\ \Phi(x-y) = \Gamma(x-y) & y \in \partial\Omega, \end{cases}$$

再用一次第二格林公式, 有

$$\int_\Omega u\Delta_y\Phi(y-x) - \Delta u\Phi(y-x)\mathrm{d}y = \int_{\partial\Omega} u(y)\frac{\partial\Phi(y-x)}{\partial\nu} - \frac{\partial u}{\partial\nu}\Phi(y-x)\mathrm{d}\sigma_y$$

$$\int_{\partial\Omega}\Gamma(x-y)\frac{\partial u}{\partial\nu}\mathrm{d}\sigma_y = \int_{\partial\Omega}\Phi(x-y)\frac{\partial u}{\partial\nu}\mathrm{d}\sigma_y = \int_{\partial\Omega}\frac{\partial\Phi(y-x)}{\partial\nu}u(y)\mathrm{d}\sigma_y + \int_\Omega \Delta u\Phi(y-x)\mathrm{d}y$$

$$u(x) = \int_\Omega(\Gamma-\Phi)\Delta u\mathrm{d}y + \int_{\partial\Omega} u\frac{\partial(\Gamma-\Phi)}{\partial\nu}\mathrm{d}\sigma_y$$

$$G(x-y) = \Gamma(x-y) - \Phi(x-y) \Longrightarrow u(x) = \int_\Omega G(x,y)\Delta u(y)\mathrm{d}V + \int_{\partial\Omega} u\frac{\partial G}{\partial\nu}(x,y)\mathrm{d}\sigma_y$$

但还不知道 $\Phi(x,y)$ 存在性

一步到位的话, 就是要找一个在指定位置是 Dirac 测度, 在边界上为零的函数 G.

定理 1.7.1. $\Omega = B_R(0)$,

$$G(x,y) = \frac{1}{(2-n)\omega_n}\left(|y-x|^{2-n} - \left|\frac{|x|}{R}y - \frac{R}{|x|}x\right|^{2-n}\right)$$

$$G(x,y) = \frac{1}{2\pi}\left(\log|y-x| - \log\left(\frac{|x|}{R}y - \frac{R^2}{|x|^2}x\right)\right)$$

证明. □

结论：

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } B_R(0) \\ u = \varphi & \text{on } \partial B_R(0) \end{cases}$$

$$u(x) = \int_{\partial B_R(0)} \varphi(y)\frac{\partial G}{\partial \nu}(x-y)\mathrm{d}\sigma_y$$

作业：$\dfrac{\partial G}{\partial \nu}(x-y) = \dfrac{\partial G}{\partial y_i}(x-y)\dfrac{y_i}{R}\Big|_{|y|=R}$

$\dfrac{\partial}{\partial y_i}|y-x|^{2-n} = (2-n)|y-x|^{-n}(y-x)_i$

$\dfrac{\partial}{\partial y_i}\left|\dfrac{|x|}{R}y - \dfrac{R}{|x|}x\right|^{2-n} =?$

解存在前提下得到, 作业 2：验证它 $\in C^2(B_R)\cap C(\overline{B_R(0)})$

球上的 Green 函数

找经典解问题转化成 Green 函数存在性

$\Omega = B_R(0)$,Green 函数（Kelvin 变换上半空间也有）

理论上来说, 平面情形下, 由共形变换, 都能找到

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{in } B_R(0) \\ u = \varphi & \text{on } \partial B_R(0) \end{cases}$$

球上 Dirichlet 问题可解.$\varphi \in C^0(\partial\Omega), f \in C(\overline{\Omega})$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } \Omega \subset \mathbb{R}^n \\ u = \varphi & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

找解,$u \in C^2(\Omega)\cap C(\overline{\Omega})$,Perron 过程（不讲）难, 对 Ω 加条件.

即使找不出显式的 Green 函数,Green 函数的存在性也重要 $\Longrightarrow$ 解的性质

Green 表示：散度定理：$\partial\Omega \in C^1$,Ω 有界区域 $\subset \mathbb{R}^n$,$\vec{X} \in C^1(\overline{\Omega})$ 向量场

$\displaystyle\int_\Omega \operatorname{div}\vec{X}\mathrm{d}V = \int_{\partial\Omega}\vec{X}\cdot\nu\mathrm{d}\sigma$

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{in } \Omega \subset \mathbb{R}^n \\ u = \varphi & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

Green 函数目的：写出解的表达式

$u, v \in C^2(\Omega)\cap C^1(\overline{\Omega})$

$\int_\Omega (u\Delta v - v\Delta u)\mathrm{d}V = \int_\Omega (uv_i - vu_i)_i \mathrm{d}V = \int_{\partial\Omega} \left(u\frac{\partial v}{\partial \nu} - v\frac{\partial u}{\partial \nu} \right) \mathrm{d}\sigma$

技巧：如何处理有奇点的式子？$\Omega \backslash B_\varepsilon(x)$ 找经典解问题转化成 Green 函数存在性

$\Omega = B_R(0)$,Green 函数（Kelvin 变换上半空间也有）

理论上来说, 平面情形下, 由共形变换, 都能找到

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{in } B_R(0) \\ u = \varphi & \text{on } \partial B_R(0) \end{cases}$$

球上 Dirichlet 问题可解.$\varphi \in C^0(\partial\Omega), f \in C(\overline{\Omega})$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } \Omega \subset \mathbb{R}^n \\ u = \varphi & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

找解,$u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$,Perron 过程（不讲）难, 对 Ω 加条件.

即使找不出显式的 Green 函数,Green 函数的存在性也重要 $\Longrightarrow$ 解的性质

Green 表示：散度定理：$\partial\Omega \in C^1$,Ω 有界区域 $\subset \mathbb{R}^n$,$\vec{X} \in C^1(\overline{\Omega})$ 向量场

$\int_\Omega \operatorname{div} \vec{X} \mathrm{d}V = \int_{\partial\Omega} \vec{X} \cdot \nu \mathrm{d}\sigma$

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{in } \Omega \subset \mathbb{R}^n \\ u = \varphi & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

Green 函数目的：写出解的表达式

$u, v \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$

$\int_\Omega (u\Delta v - v\Delta u)\mathrm{d}V = \int_\Omega (uv_i - vu_i)_i \mathrm{d}V = \int_{\partial\Omega} \left(u\frac{\partial v}{\partial \nu} - v\frac{\partial u}{\partial \nu} \right) \mathrm{d}\sigma$

技巧：如何处理有奇点的式子？$\Omega \backslash B_\varepsilon(x)$

上半平面上的 Green 函数

1.7.1 Perron 方法

https://en.wikipedia.org/wiki/Perron method

1.8 调和函数的奇点可去定理

$\Delta u=0, B_R(0)\backslash\{0\}$

$$u(x)=\begin{cases} o\left(|x|^{2-n}\right), & n\geqslant 3\\ o(\log|x|) & n=2\end{cases}$$

则 u 在 0 处能定义, 使得 $\Delta u=0, B_R(0)$

$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{u_i}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}\right)_i=0$

$H(u): B_R(0)\backslash\{0\}$ 奇点可去

$n\geqslant 3, v=\begin{cases}\Delta v=0 & \text{in } B_R(0)\\ v= & \end{cases}$

$w=v-u, M=\sup\limits_{\partial B_R}|u|, M_r=\sup\limits_{\partial B_r(0)}|u|$

$-M_r\frac{r^{n-2}}{|x|^{n-2}}\leqslant W\leqslant M_r\frac{r^{n-2}}{|x|^{n-2}}\leqslant W\leqslant M_r\frac{r^{n-2}}{|x|^{n-2}}, \partial B_R\backslash B_r(0)$

$\Longrightarrow -M_r\frac{r^{n-2}}{|x|^{n-2}}\leqslant w\leqslant M_r\frac{r^{n-2}}{|x|^{n-2}}$

$\Longrightarrow M_r=\sup\limits_{\partial B_r}|w|\leqslant\sup\limits_{\partial B_r}|u|+\sup\limits_{\partial B_r}|v|$

$|w(x)|\leqslant\frac{(M+\sup_{\partial B_r}|u|)r^{n-2}}{|x|^{n-2}}\to 0\Longrightarrow w\equiv 0$

作业 3,$n=2$.

1.9 与电磁学的对应

u	电势
f	电荷密度
基本解	点电荷的电势分布
无边界条件时 Poisson 方程的解	电势的线性叠加

Chapter 2

椭圆方程 I

极值原理的一些陈述的比较

- u 不可能在内部达到极大值 $\overset{\text{区域有界+连续到边}}{\Longrightarrow}$ u 的最大值在边界达到
- u 的最大值在边界达到 $\Longrightarrow$ u 在 $\partial\Omega$ 上的上界估计能给出 u 在 $\overline{\Omega}$ 上的上界估计.
- u 的非负最大值在边界达到
  - u 可以取不到最大值（当然在 Ω 有界的情况下,u 能达到在 $\overline{\Omega}$ 上的最大值）
  - 假如 u 取的到最大值
    - 最大值可能为负, 此时我对它在哪点取到最大值没有限制, 但天然地有上界估计
    - 最大值可能非负, 此时必定**能**在边界取到（注意不是**只能**在边界取到）, 从而 u 在 $\partial\Omega$ 上的上界估计能给出 u 在 $\overline{\Omega}$ 上的上界估计
- u 的非负最大值只能在边界达到, 除非 u 为常数/若 u 在内部达到非负极大值, 则 u 为常数
- u 不可能在内部达到非负极大值

  模长估计当然既是上界估计又是下界估计！

极值原理的一些条件的比较

- 给一个 $\mathscr{L}u \geqslant 0$ 的 u, 那 $\tilde{u} = -u$ 便满足 $\mathscr{L}\tilde{u} \leqslant 0$.

2.1 一般椭圆方程的弱极值原理

引理 2.1.1. $A \geqslant 0, B \leqslant 0, tr(AB) \leqslant 0.$

2.1.1 $c \equiv 0$

引理 2.1.2. 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 为区域,$u \in C^2(\Omega)$,$\mathscr{L}u = a_{ij}u_{ij} + b_i u_i > 0, \forall\, x \in \Omega$, 其中 a_{ij} 处处为半正定矩阵, 则 u 不可能在内部达到极大值.

注记. 解析一下条件: $u \in C^2(\Omega)$ 是为了在经典的意义下 $\mathscr{L}$ 能作用到 u 上.

命题 2.1.3. 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 为有界区域,$u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$,$\mathscr{L}u = a_{ij}u_{ij} + b_i u_i \geqslant 0, \forall\, x \in \Omega$, 其中 $a_{ij} \geqslant \lambda I$ 处处成立,$\lambda > 0$,$\|b\|_{C_0(\Omega)} = \Lambda$, 那么 u 的最大值在边界达到.

证明. 考察 $\varphi = u + \varepsilon \mathrm{e}^{\beta x_1}$, 其中 $\varepsilon > 0$ 为任意常数,β 为待定系数.

如果能选取合适的 $\beta = \beta_0$ 使得 $\mathscr{L}\varphi > 0, \forall\, x \in \Omega$, 则 φ 的最大值在边界达到, 那么

$$\sup_{\overline{\Omega}} u \leqslant \sup_{\overline{\Omega}} \varphi = \sup_{\partial\Omega} \varphi \leqslant \sup_{\partial\Omega} u + \varepsilon C.$$

令 $\varepsilon \to 0$ 即得 $\sup_{\overline{\Omega}} u = \sup_{\partial\Omega} u$. 下寻找合适的 $\beta = \beta_0$.

$\varphi_i = u_i + \varepsilon\beta \mathrm{e}^{\beta x_1}\delta_{i1}$

$\varphi_{ij} = u_{ij} + \varepsilon\beta^2 \mathrm{e}^{\beta x_1}\delta_{i1}\delta_{j1}$

$\mathscr{L}\varphi = a_{ij}\varphi_{ij} + b_i\varphi_i = \mathscr{L}u + \varepsilon\beta \mathrm{e}^{\beta x_1}(\beta a_{11} + b_1)$

取 $\beta = \beta_0$ 使得 $\lambda\beta_0 a_{11} + b_1 \geqslant 0$. □

注记. 解析一下条件:

- Ω 有界 $\Longrightarrow \mathrm{e}^{\beta_0 x_1}$ 有界
- Ω 有界 + $u \in C(\overline{\Omega}) \Longrightarrow u$ 和 φ 在 $\overline{\Omega}$ 上能取到最大值.
- a_{ij} 和 b_i 的控制 $\Longrightarrow$ 能取到合适的 $\beta = \beta_0$

2.1.2 $c \leqslant 0$

引理 2.1.4. 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 为区域,$u \in C^2(\Omega)$,$\mathscr{L}u = a_{ij}u_{ij} + b_i u_i + cu > 0, \forall\, x \in \Omega$, 其中 a_{ij} 处处为半正定矩阵,$c \leqslant 0$, 则 u 不可能在内部达到非负极大值.

注记. 不管是什么版本的极值原理, 我们的终极目标是给出 u 的估计.

因此不妨从 u 取到最大值的情形出发去理解结论:

- u 在边界 $\partial\Omega$ 上取到最大值

  此时皆大欢喜,u 在边界 $\partial\Omega$ 上的上界估计能给出 u 在整体 $\overline{\Omega}$ 上的上界估计.

- u 在内部 Ω 中取到最大值

  这也没有问题, 因为引理告诉我们这个最大值必须是负的, 从而天然地有上界估计 $u < 0$.

将这两种情形合并起来, 还是"u 在边界 $\partial\Omega$ 上的上界估计能给出 u 在整体 $\overline{\Omega}$ 上的上界估计".

命题 2.1.5. 设 $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ 为**有界**区域,$u\in C^2(\Omega)\cap C(\overline{\Omega})$,$\mathscr{L}u=a_{ij}u_{ij}+b_iu_i+cu\geqslant 0,\forall\ x\in\Omega$, 其中 $a_{ij}\geqslant\lambda I$ 处处成立,$\lambda>0$,$\|b\|_{C_0(\Omega)}=\Lambda$,$c\leqslant 0$, 那么 u 的非负最大值在边界达到.

证明. $\varphi=u+\varepsilon\mathrm{e}^{\alpha x_1}$.

$\mathscr{L}\varphi=\mathscr{L}u+\varepsilon\mathrm{e}^{\alpha x_1}(\alpha^2a_{11}+\alpha b_1+c)$

取 $\alpha=\alpha_0$

$\alpha_0^2\lambda-(\alpha_0+1)\Lambda=1\Longrightarrow\mathscr{L}\varphi>0$

取 $\alpha=\alpha_0,\alpha_0^2\lambda-(1+\alpha_0)\Lambda=1$, 此时,$\mathscr{L}\varphi>0 in\Omega$ 由 Step2 知,φ 的非负最大值在 $\partial\Omega$ 达到.

$\sup u\leqslant\sup\limits_{\Omega}\varphi\leqslant\sup\limits_{\partial\Omega}(u+\varepsilon\mathrm{e}^{\alpha_0x^1})^+\leqslant\sup\limits_{\partial\Omega}u^++\varepsilon\sup\limits_{\partial\Omega}\mathrm{e}^{\alpha_0x^1}$

$\Longrightarrow\sup\limits_{\Omega}u\leqslant\sup\limits_{\partial\Omega}u^+$ □

注记. 还是从 u 取到最大值的情形出发理解结论

- 如果 u 的最大值是非负的, 命题告诉我们该最大值在边界取到, 从而 u 在边界 $\partial\Omega$ 上的上界估计能给出 u 在整体 $\overline{\Omega}$ 上的上界估计.
- 如果 u 的最大值是负的, 天然地有上界估计 $u<0$.

将这两种情形合并起来, 还是"u 在边界 $\partial\Omega$ 上的上界估计能给出 u 在整体 $\overline{\Omega}$ 上的上界估计".

例 2.1.6. $\Omega=[0,\pi]\times[0,\pi]$

$$\begin{cases}\Delta u+2u=0\\ u\big|_{\partial\Omega}=0\end{cases}$$

2.2 Dirichlet 边值问题的有界估计

所谓有界估计是指对 $\|u\|_{C^0(\overline{\Omega})}$ 的估计. 对于 Dirichlet 边值的 Laplace 方程

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & x \in \Omega \\ u = \varphi & x \in \partial\Omega \end{cases},$$

由弱极值原理我们知道 u 在 Ω 上的大小被 u 在 $\partial\Omega$ 上的大小控制, 即有

$$\|u\|_{C^0(\overline{\Omega})} \leqslant \|\varphi\|_{C^0(\partial\Omega)}.$$

注意此时 $\|u\|_{C^0(\overline{\Omega})}$ 与区域 Ω 的大小无关. 如果 $\Delta u = f$ 呢?

Baby 版本

我们首先考虑

$$\begin{cases} \Delta u = 1 & x \in \Omega \\ u = 0 & x \in \partial\Omega \end{cases},$$

更一般情形的想法完全体现在这个简单例子中.

一侧是显然的, 因为 $\Delta u > 0$, 所以 u 的极大值（从而最大值）不可能在内部取到, 所以 $u < 0$. 为了得到另一侧的估计, 我们的思路是找到一个合适的函数 v,

- 它在边界上能从下方控制住 u, 即 $u - v \geqslant 0$ 在边界上成立
- 如果希望从边界上成立走到在整个 Ω 上成立, 我们需要 $\Delta u - \Delta v \leqslant 0$

下面来找合适的 v. 当 $\Omega = B_R(0)$ 时, 我们能直接写出这个方程的解

$$v = \frac{|x|^2 - R^2}{2n}.$$

对于一般的有界区域 Ω, 总能找到 x_0 和 R 使得 $\Omega \subset B_R(x_0)$. 令

$$v = \frac{|x - x_0|^2 - R^2}{2n}$$

则 $\Delta v = 1, v\big|_{\partial\Omega} \leqslant 0$, 满足条件, 从而在 Ω 中也有 $v \leqslant u$. 综上, 我们得到估计

$$\frac{|x - x_0|^2 - R^2}{2n} \leqslant u \leqslant 0.$$

这个论证可抽象为如下的比较定理

定理 2.2.1. *设* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *是有界区域,* $u, v \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega}), \mathscr{L}u = a_{ij}u_{ij} + b_i u_i + cu$, *其中* $c \leqslant 0$, *则*

$$\begin{cases} \mathscr{L}u \geqslant \mathscr{L}v & x \in \Omega \\ u \leqslant v & x \in \partial\Omega, \end{cases} \Longrightarrow u \leqslant v, x \in \Omega.$$

Poisson 方程

考虑 Poisson 方程

$$\begin{cases} \Delta u = f & x \in \Omega \\ u = \varphi & x \in \partial\Omega \end{cases},$$

其中 $\Omega \subset B_R(x_0)$. 为了找到 u 的下界估计, 我们需要一个 v 满足

$$u - v \geqslant 0, x \in \partial\Omega, \quad \Delta u - \Delta v \leqslant 0, x \in \Omega.$$

记 $F = \|f\|_{C^0(\overline{\Omega})}, \Phi = \|\varphi\|_{C^0(\partial\Omega)}$. 令

$$v = -\Phi + \left(\frac{|x - x_0|^2 - R^2}{2n}\right) F,$$

则 $v \leqslant u$. 同理可得 $u \leqslant -v$.

一般椭圆方程

考虑一般椭圆方程

$$\begin{cases} \mathscr{L}u = \sum a_{ij}u_{ij} + \sum b_i u_i + cu = f & x \in \Omega \\ u = \varphi & x \in \partial\Omega \end{cases},$$

其中 $c(x) \leqslant 0$, Ω 是有界区域. 求 $\|u\|_{C^0}$ 的先验估计. 仍记 $F = \|f\|_{C^0(\overline{\Omega})}, \Phi = \|\varphi\|_{C^0(\partial\Omega)}$.

不妨设 $\Omega \subset \{0 < x_1 < d\}$, 设

$$v = \Phi + (\mathrm{e}^{\mu d} - \mathrm{e}^{\mu x_1})F,$$

其中 μ 待定. 注意到 $v\big|_{\partial\Omega} \geqslant \Phi \geqslant u\big|_{\partial\Omega}$, 如果能说明 $\mathscr{L}u \geqslant \mathscr{L}v$ 便可说明 $u \leqslant v$. 计算得

$$\begin{aligned} v_i &= -\mu F \mathrm{e}^{\mu x_1}\delta_{i1} \\ v_{ij} &= -\mu^2 F \mathrm{e}^{\mu x_1}\delta_{i1}\delta_{j1} \\ \mathscr{L}v &= \sum a_{ij}v_{ij} + \sum b_i v_i + cv \\ &= a_{11}v_{11} + b_1 v_1 + cv \\ &= -\mu^2 F a_{11}\mathrm{e}^{\mu x_1} - \mu F b_1 \mathrm{e}^{\mu x_1} + c(\Phi + (\mathrm{e}^{\mu d} - \mathrm{e}^{\mu x_1})F) \\ &= F\mathrm{e}^{\mu x_1}\left(-\mu^2 a_{11} - \mu b_1\right) + c(\Phi + (\mathrm{e}^{\mu d} - \mathrm{e}^{\mu x_1})F) \\ &\leqslant F\mathrm{e}^{\mu x_1}\left(-\mu^2 a_{11} - \mu b_1\right) \end{aligned}$$

取 μ_0 使得 $\mu_0^2 a_{11} + \mu_0 b_1 = 1$, 则

$$\mathscr{L}v \leqslant -F\mathrm{e}^{\mu x_1} \leqslant -F \leqslant \mathscr{L}u \Longrightarrow u \leqslant v, x \in \Omega.$$

2.3 整体梯度估计约化到边界梯度估计

3 月 3 日 1 小时 50 分 8 秒

回忆：$\Delta u=0$, 令 $\varphi=|\nabla u|^2, \Delta\varphi=2\sum u_{ij}^2\geqslant 0 \Longrightarrow |\nabla u|$ 的最大值在边界达到.

2.3.1 Poisson 方程

$\Delta u=f, f\in C^1(\overline{\Omega}), u\in C^3(\Omega)\cap C^1(\overline{\Omega}), \|u\|_{C^0(\overline{\Omega})}\leqslant M, \Omega\subset\{0<x_1<d\}$.

要构造一个含 $|\nabla u|^2$ 的 φ 使得 $\Delta\varphi\geqslant 0$.

$\Delta|\nabla u|^2=2u_{ij}^2+2u_jf_j$.

$2u_{ij}^2$ 是个平民项. 首先, 它大于等于零, 与我们的目标一致；其次, 它不足以用来控制坏项.

$2u_jf_j\geqslant -2|\nabla u||\nabla f|\geqslant -2\|\nabla f\|_{C^0(\overline{\Omega})}|\nabla u|$ 是个坏项, 我们必须引入好项来控制它！

尝试一

3 月 3 日 1 小时 52 分 42 秒

$\varphi=|\nabla u|^2+\alpha u^2$, 其中 α 为待定系数.

$\varphi_i=2u_ju_{ji}+2\alpha uu_i$

$\Delta\varphi=\varphi_{ii}=2u_{ji}^2+2u_ju_{jii}+2\alpha u_i^2+2\alpha uu_{ii}=2u_{ij}^2+2u_jf_j+2\alpha|\nabla u|^2+2\alpha uf$.

$2\alpha|\nabla u|^2$ 是好项！作为 $|\nabla u|$ 的二次项, 它能够用来控制 $|\nabla u|$ 的一次项 $-2\|\nabla f\|_{C^0(\overline{\Omega})}|\nabla u|$, 即 $2\alpha|\nabla u|^2-2\|\nabla f\|_{C^0(\overline{\Omega})}|\nabla u|\geqslant -\dfrac{\|\nabla f\|_{C^0(\overline{\Omega})}}{2\alpha}$.（用到了 $ax^2+bx\geqslant -\dfrac{b^2}{4a}$, 其中 $a>0$）

但这并没有完全达到我们的目的.

一方面, 二次项在干掉一次项时, 还留下了残党常数项 $-\dfrac{\|\nabla f\|_{C^0(\overline{\Omega})}}{2\alpha}$ 需要控制. 另一方面, 为了引入二次项这个好项, 我们也做出了一些牺牲, 即同时引入了常数项 $2\alpha uf\geqslant -2\alpha M\|f\|_{C^0(\overline{\Omega})}$.

尝试二

3 月 3 日 1 小时 57 分 10 秒

$\varphi=|\nabla u|^2+\mathrm{e}^{\beta x_1}$, 其中 β 为待定系数.

$\varphi_i=2u_ju_{j_i}+\beta\mathrm{e}^{\beta x_1}\delta_{i1}$

$\Delta\varphi=\varphi_{ii}=2u_{ji}^2+2u_ju_{jii}+\beta^2\mathrm{e}^{\beta x_1}\delta_{i1}=2u_{ij}^2+2u_jf_j+\beta^2\mathrm{e}^{\beta x_1}$

$\beta^2\mathrm{e}^{\beta x_1}$ 对于 $2u_jf_j$ 无能为力, 但我们注意到它能够用来控制常数项！

尝试三

3 月 3 日 1 小时 58 分 59 秒

$\varphi=|\nabla u|^2+\alpha u^2+\mathrm{e}^{\beta x_1}$

$\Delta\varphi=2u_{ij}^2+2u_jf_j+2\alpha|\nabla u|^2+2\alpha uf+\beta^2\mathrm{e}^{\beta x_1}$

$\Delta\varphi\geqslant 2u_{ij}^2+\beta^2-\dfrac{\|\nabla f\|_{C^0(\overline{\Omega})}}{2\alpha}-2\alpha M\|f\|_{C^0(\overline{\Omega})}$.

令 $\alpha=1$, 取 $\beta=\beta_0$ 充分大使得 $\Delta\varphi\geqslant 0$. 从而

$$\sup_{\Omega}|\nabla u|^2\leqslant\sup_{\Omega}\varphi\leqslant\sup_{\partial\Omega}\varphi\leqslant\sup_{\partial\Omega}|\nabla u|^2+M^2+\mathrm{e}^{\beta_0 d}.$$

2.3.2 一般椭圆方程

3 月 3 日第二段 4 分 27 秒

3 月 3 日第二段 23 分 5 秒——30 分 42 秒

作业 2.3.1. 证明一般情形.

2.4 Dirichlet 边值问题的边界梯度估计

3 月 7 日 6 分 7 秒, 前情回顾及内容提要

3 月 7 日 16 分 33 秒

定义 2.4.1. 称 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 满足外球条件, 如果

$d(x) = \text{从}x\text{到}\partial B_R(y)$ 的距离 $= |x-y| - R$

定理 2.4.2. 设 $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega}), \mathscr{L}u = a_{ij}u_{ij} + b_iu_i + cu$, 其中 $a_{ij}, b_i, c \in C(\overline{\Omega}), a_{ij} \geqslant \lambda I$. 设 $\varphi \in C^2(\overline{\Omega})$, 那么对于 *Dirichlet* 边值问题 $\begin{cases} \mathscr{L}u = f & x \in \Omega \\ u = \varphi & x \in \partial\Omega \end{cases}$ 成立 $|u(x) - u(x_0)| \leqslant c|x - x_0|, \forall\, x \in \Omega$. 其中 $x_0 \in \partial\Omega, c \sim \lambda, \Omega, \|a_{ij}, b_i, c\|_{L^\infty(\overline{\Omega})}, M = \sup\limits_{\overline{\Omega}} |u|, \|f\|_{L^\infty(\overline{\Omega})}, \|\varphi\|_{C^2(\overline{\Omega})}$.

证明. $\tilde{L}u = \sum a_{ij}u_{ij} + b_iu_i = f - cu = \tilde{f}$

令 $v = u - \varphi, \tilde{L}v = Lu - L\varphi = f - L\varphi$

$$\begin{cases} \tilde{L}v = \tilde{L}u - \tilde{L}\varphi = \tilde{f} - \tilde{L}\varphi \\ v = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} Lu = \tilde{f} \\ u = 0 \end{cases}$$

如果存在 $w(x)$ 使得 $\tilde{L}w \leqslant -F, F = \|\tilde{f}\|_{C^0(\overline{\Omega})}$

$w(x_0) = 0, w(x) \geqslant 0 in\Omega$

$\Longrightarrow -w \leqslant u \leqslant w\text{in}\Omega$

$v = w - u, \tilde{L}v = \tilde{L}w - \tilde{L}u \leqslant -F - \tilde{f} \leqslant 0$ □

令 $w = \psi(d), d(x) = |x-y| - R, \psi(0) = 0, \psi'(d) > 0$

$\tilde{L}w = \sum a_{ij}\psi_{ij} + \sum b_i\psi_i$

$|x-y|_i = (|x-y|^2)^{\frac{1}{2}}$

$\psi_i = \psi' d_i$

$\psi_{ij} = \psi'' d_i d_j = \psi' d_{ij}$

d_{ij}

$|\nabla d|^2 = 1$

$\tilde{L}w = \psi'' \sum a_{ij}d_id_j + \psi' \sum a_{ij}d_{ij} + \psi' \sum b_id_i \leqslant -F$

$a_{ij}d_id_j \geqslant \lambda|\nabla d|^2 = \lambda$

$a_{ij}d_{ij} = \dfrac{\sum a_{ij}}{|x-y|} - \dfrac{\sum a_{ij}(x-y)}{|x-y|^3} \leqslant \dfrac{n\Lambda}{|x-y|} - \dfrac{\lambda}{|x-y|} = \dfrac{n\Lambda - \lambda}{R}$

$$\begin{cases} \psi'' < 0, \lambda\psi;; + \dfrac{n\Lambda - \lambda}{R}\psi' + \Lambda \leqslant -F \\ psi(0) = 0 \end{cases}$$

2.5 Hopf 引理与一般椭圆方程的强极值原理

3 月 7 日 1 小时 7 分 13 秒——1 小时 10 分 22 秒,Hopf 引理陈述

3 月 7 日 1 小时 10 分 23 秒——1 小时 13 分 15 秒, 简单情形＋内球条件 $\Longrightarrow$ 一般情形

3 月 7 日 1 小时 13 分 16 秒——1 小时 31 分 6 秒, 简单情形的证明

3 月 7 日 1 小时 31 分 12 秒——1 小时 33 分 31 秒, 回顾

$Lu = a_{ij}u_{ij} + b_iu_i + cu.$

定理 2.5.1 (Hopf 引理)**.** 设 $\Omega = B_R(0), u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$. 设 $\mathscr{L}u \geqslant 0$, 其中 $c \leqslant 0$. 若 u 在 $x_0 \in \partial B_R(0)$ 处取到最大值 $u(x_0) \geqslant 0$, 那么 $\dfrac{\partial u}{\partial n}(x_0) > 0$.

注记. 若 u 在 $x_0 \in \partial B_R(0)$ 处取到最大值, 那么 $\dfrac{\partial u}{\partial n}(x_0) \geqslant 0$.

证明. 设 $\widetilde{\Omega} = B_R(0) \backslash \overline{B_{\frac{R}{2}}(0)}$. 令 $\psi(x) = \mathrm{e}^{-\mu|x|^2} - \mathrm{e}^{-\mu R^2}, \varphi(x) = u(x) - u(x_0) + \varepsilon\psi(x)$.

假设可取 $\mu = \mu_0$ 充分大使得 $\mathscr{L}\psi \geqslant 0$, 那么 $\mathscr{L}\varphi = \mathscr{L}u - c(x_0)u(x_0) + \varepsilon\mathscr{L}\psi \geqslant 0$.

取定 $\mu = \mu_0$, 容易验证可选取 $\varepsilon = \varepsilon_0$ 充分小使得 φ 在 $\partial\widetilde{\Omega}$ 上小于等于零.

因此 φ 在 $\widetilde{\Omega}$ 上的最大值在 x_0 处达到, 从而 $\dfrac{\partial \varphi}{\partial n}(x_0) = \dfrac{\partial u}{\partial n}(x_0) + \varepsilon_0\dfrac{\partial \psi}{\partial n}(x_0) \geqslant 0$.

□

3 月 7 日 1 小时 34 分 44 秒——1 小时 37 分 58 秒, 强极值原理陈述

3 月 7 日 1 小时 38 分 17 秒——1 小时 41 分 44 秒, 强极值原理证明

定理 2.5.2 (强极值原理)**.** $Lu = \sum a_{ij}u_{ij} + \sum b_iu_i + cu \geqslant 0$

$c(x) \leqslant 0 \Longrightarrow u$ 的非负最大值一定在 $\partial\Omega$ 达到, 否则 $u \equiv const$

证明. □

3 月 7 日 1 小时 41 分 45 秒——1 小时 45 分 44 秒, 布置作业

作业 2.5.3.

证明. 见第 6 次习题课第一题 □

作业 2.5.4.

证明. 见第 5 次习题课第一题 □

3 月 10 日 6 分 15 秒——12 分 41 秒, 内容提要与前情回顾

3 月 10 日 14 分 32 秒, 去掉 $c(x) \leqslant 0$ 的条件

3 月 10 日 16 分 45 秒——21 分 2 秒, 证明

定理 2.5.5. 设 $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ 满足 $Lu \geqslant 0$. 如 $u \leqslant 0$ 在 Ω, 则 $u < 0$ 在 Ω 或 $u \equiv 0$ 在 Ω.

证明. 记 $c(x) = c^+(x) - c^-(x)$, 其中 $c^+(x)$ 为 $c(x)$ 的正部,$c^-(x)$ 为 $c(x)$ 的负部.

$Lu \geqslant 0 \Longrightarrow a_{ij}u_{ij} + b_iu_i - c^-(x)u \geqslant -c^+(x)u \geqslant 0,\ x \in \Omega.$

由强极值原理, 若存在一点 $x_0 \in \Omega$ 使得 $u(x_0) = 0$, 则 $u \equiv 0$. □

2.6 强极值原理的应用

3 月 10 日 27 分 30 秒

回忆作业1.4.5, 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$,$u$ 满足

$$\begin{cases} \Delta u = -2 & x \in \Omega \\ u = 0 & x \in \partial\Omega \end{cases}.$$

设 $\varphi = 2u \det u_{ij} + 2u_1 u_2 u_{12} - u_2^2 u_{11} - u_1^2 u_{22}$, 我们证明了 $\Delta\varphi \leqslant 0$.

由强极值原理,$u > 0 \mathrm{in} \Omega$; 由 Hopf 引理,$\left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial\Omega} < 0$.

3 月 10 日 29 分 28 秒, 附加 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ 为有界凸区域.

设 $v = -\sqrt{u}$, 我们要证 v 严格凸.

- $u = v^2, v < 0$
- $u_i = 2vv_i, \Delta u = 2|\nabla v|^2 + 2v\Delta v = -2$

所以 v 满足

$$\begin{cases} v\Delta v = -(1 + |\nabla v|^2) \\ v\big|_{\partial\Omega} = 0 \\ v < 0 \end{cases}.$$

$\varphi = 2u \det u_{ij} + 2u_1 u_2 u_{12} - u_1^2 u_{22} - u_2^2 u_{11}$

设 $\psi = 8v^4 \det v_{ij}$

- $v_i = -\dfrac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}} u_i$
- $v_{ij} = \dfrac{1}{4} u^{-\frac{3}{2}} u_i u_j - \dfrac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}} u_{ij} = \dfrac{1}{4} u^{-\frac{3}{2}} (u_i u_j - 2u u_{ij})$

$$\begin{aligned} \psi &= 8v^4 \cdot \frac{u^{-3}}{16} \begin{vmatrix} u_1^2 - 2uu_{11} & u_1 u_2 - 2uu_{12} \\ u_1 u_2 - 2uu_{12} & u_2^2 - 2uu_{22} \end{vmatrix} \\ &= u_1^2 u_2^2 - 2uu_1^2 u_{22} - 2uu_{11} u_2^2 + 4u^2 u_{11} u_{22} - u_1^2 u_2^2 - 4u^2 u_{12} + 4uu_1 u_2 u_{12} \\ &= \frac{1}{2u} \left(4u^2 \det u_{ij} + 2u(u_1 u_2 u_{12} - u_2^2 u_{11} - u_1^2 u_{22})\right) = \varphi \end{aligned}$$

注记. *3 月 10 日 40 分 5 秒,ψ 怎么想到的.*

$\dfrac{\partial u}{\partial n} < 0 \Longrightarrow u \sim c_0 d(x)$

$-c_1 \leqslant \dfrac{\partial u}{\partial n} \leqslant -c_2$

$x \in \Omega, d(x) = dist(x, \partial\Omega)$

$\dfrac{\partial d}{\partial v} = -1$

$u \sim d^\alpha$

$u_i \sim d^{\alpha-1}$

$u_{ij} \sim d^{\alpha-2}$

$-\Delta u \sim d^{\alpha-2} = -2 = d^0$

$\alpha - 2 = 0, \alpha = 2$

陈书例题,Ω 为等边三角形,$\frac{1}{2}$ 最佳.

3 月 10 日 45 分 32 秒

$\varphi\big|_{\partial\Omega} = 2u_1u_2u_{12} - u_2^2u_{11} - u_1^2u_{22}$

$u(x_1, x_2) \equiv const$

曲率 $\frac{2u_1u_2u_{12} - u_2^2u_{11} - u_1^2u_{22}}{|\nabla u|^2}$

$\varphi\big|_{\partial\Omega} = (k|\nabla u|^3)\big|_{\partial\Omega}$

$|\nabla u|^2 = u_T^2 + u_v^2 \geqslant 0$

$\varphi\big|_{\partial\Omega} \geqslant 0$

$\begin{cases} \Delta\varphi \leqslant 0 in\Omega \\ \varphi\big|_{\partial\Omega \geqslant 0} \end{cases} \Longrightarrow \varphi > 0 in\Omega$

$v = -\sqrt{u}$ 严格凸函数（v 的特征值加起来乘起来都大于零）

title

3 月 30 日 53 分 1 秒

命题 2.6.1. *方程* $v\Delta v = -(1 + |\nabla v|^2)$

如 $\varphi = \det v_{ij} \geqslant 0$

则 $\varphi \equiv 0 in\Omega$ *或* $\varphi > 0 in\ \Omega$

证明. 记 $E = \{x \in \Omega \mid \varphi(x) = 0\}$. 假设 $\exists\ x_0 \in \Omega, \varphi(x_0) = 0$, 则 $E \neq \varnothing$.

因为 $v \in C^3(\Omega)$, 所以 E 是 Ω 中的相对闭集. 下证 E 相对 Ω 为开.

即证若 $x_1 \in E$, 那么存在 $\varepsilon > 0$ 使得 $\varphi(x) \equiv 0$ 在 $B_\varepsilon(x_1)$ 上.

由强极值原理及 $\varphi \geqslant 0$, 只需证明 $\Delta\varphi \leqslant c_1|\nabla\varphi| + c_2\varphi$ 在某个 $B_\varepsilon(x_1)$ 上成立.

$\varphi = \det v_{ij} = v_{11}v_{22} - v_{12}^2$

$\varphi(x_1) = 0, v_{11} + v_{22} > 0$

对 $\bar{x}$ 在 x_1 的小邻域上, 旋转坐标系使得 $v_{11}(\bar{x}) \geqslant v_{22}(\bar{x}), v_{12}(\bar{x}) = 0 \Longrightarrow v_{11}(\bar{x}) \geqslant c_0 > 0$

- $\varphi(\bar{x}) = v_{11}(\bar{x})v_{22}(\bar{x}) \Longrightarrow v_{22}(\bar{x}) = \dfrac{\varphi(\bar{x})}{v_{11}(\bar{x})}$
- $\varphi_i = v_{11i}v_{22} + v_{11}v_{22i} - 2v_{12}v_{12i} \Longrightarrow \varphi_i(\bar{x}) = v_{11i}(\bar{x})v_{22}(\bar{x}) + v_{11}(\bar{x})v_{22i}(\bar{x})$
  $v_{22i}(\bar{x}) = \dfrac{\varphi_i(\bar{x}) - v_{11i}(\bar{x})v_{22}(\bar{x})}{v_{11}(\bar{x})} = \dfrac{\varphi_i(\bar{x})}{v_{ii}(\bar{x})} - \dfrac{v_{11i}(\bar{x})}{v_{11}(\bar{x})} \cdot \dfrac{\varphi(\bar{x})}{v_{11}(\bar{x})}$
- $\Delta\varphi = v_{11ii}v_{22} + 2v_{11i}v_{22i} + v_{11}v_{22ii} - 2v_{12i}^2 - 2v_{12}v_{12ii}$
  $\Delta v = -\dfrac{1 + |\nabla v|^2}{v} =: f(v, |\nabla v|^2)$
  $\Delta v_1 = f_v v_1 + f_{p_i} v_{i_1}$

$v_{111} + v_{221} + f_v v_1 + f_{p_i} v_{i_1}$

- $=(D_{11}f)\dfrac{\varphi}{v_{11}}$
- $=2v_{111}v_{221} + 2v_{112}v_{222}$
  $= 2v_{111}\left(\dfrac{\varphi_1}{v_{11}} - \dfrac{v_{11i}\varphi}{v_{11}^2}\right) + 2v_{112}\left(\dfrac{\varphi_2}{v_{11}} - \dfrac{v_{112}\varphi}{v_{11}^2}\right)$

$$
\begin{aligned}
\Delta v_{22} &= f_{vv}v_2^2 + f_{v_{p_i}}v_2v_{2i} + f_v v_{22} \\
&+ f_{p_i v}v_{i2}v_2 + f_{p_ip_j}v_{i2}v_{j2} + f_{p_i}v_{i22} \\
&v_{11} = f - v_{22} = f - \frac{\varphi}{v_{11}}
\end{aligned}
$$

- $ff_{vv}v_2^2 + O(\varphi) + O(|\nabla\varphi|)$
- $= -2v_{112}^2 - 2v_{122}^2$
  - $v_{112} + v_{222} = f_v v_2 + f_{p_i}v_{i2}$

    $v_{112} = f_v v_2 + f_{p_i}v_{i2} - v_{222} = f_v v_2 + o(\varphi + |\nabla\varphi|)$

  $= -2v_{112}^2 = -2f_v^2 v_2^2 + o(\varphi + |\nabla\varphi|)$

  $\Delta\varphi \leqslant ff_{vv}v_2^2 - 2f_v^2 v^2 + c_1\varphi + c_2|\nabla\varphi|^2$

  $f = -\dfrac{1+|\nabla v|^2}{v}, f_v = \dfrac{1+|\nabla v|^2}{v^2}, f_{vv} =$

  $\dfrac{2(1+|\nabla v|^2)}{v^4} - \dfrac{2(1+|\nabla v|^2)^2}{v^2}$

□

3 月 10 日 1 小时 16 分 50 秒——1 小时 18 分 53 秒, 布置作业

作业 2.6.2.

证明. 见第五次习题课第二题 □

2.7 卷积与光滑子

定义 2.7.1. 设 f 和 g 是 $\mathbb{R}^n$ 上的可测函数, 若积分

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)\mathrm{d}y$$

存在, 则称此积分为 f 与 g 的卷积, 记为 $(f*g)(x)$.

定义 2.7.2. 称 $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ 为一个光滑子, 如果它满足

(1) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\mathrm{d}x = 1$

(2) $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0} \varphi_\varepsilon(x) = \lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^{-n}\varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) = \delta(x)$.

例 2.7.3. 定义

$$\eta(x) = \begin{cases} C\mathrm{e}^{\frac{1}{|x|^2-1}} & |x|<1 \\ 0 & |x|\geqslant 1 \end{cases}$$

其中选取常数 C 使得 $\displaystyle\int_{B_1(0)} \eta(x)\mathrm{d}x = 1$.

定义 2.7.4. 设 $f \in L^1_{loc}(U)$, 定义

$$f^\varepsilon(x) = (\eta_\varepsilon * f)(x) = \varepsilon^{-n}\int_{\mathbb{R}^n} \eta\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) f(y)\mathrm{d}y.$$

容易验证

(1) $f^\varepsilon \in C^\infty(U_\varepsilon), U_\varepsilon = \{x\in U \mid \mathrm{dist}(x,\partial U) > \varepsilon\}$.

(2) 若 $f \in C^\infty(U)$, 则 $\dfrac{\partial f^\varepsilon}{\partial x_i}(x) = (\eta_\varepsilon * \dfrac{\partial f}{\partial x_i})(x)$.

命题 2.7.5. 若 $f \in C(U)/L^p_{loc}(U)/W^{k,p}_{loc}(U)$, 则 $f^\varepsilon \xrightarrow{\mathscr{T}_{c.c.}/L^p_{loc}(U)/W^{k,p}_{loc}(U)} f$, 其中 $1\leqslant p<\infty$.

证明. (i) 即证对于任意 $V \subset\subset U$, 成立 $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0}\sup_{x\in V}|f^\varepsilon(x)-f(x)| = 0$. 直接计算即可.

$$|f^\varepsilon(x)-f(x)| = \left|\int_{B(0,1)} \eta(z)\left(f(x-\varepsilon z)-f(x)\right)\mathrm{d}z\right| \leqslant \int_{B(0,1)} |f(x-\varepsilon z)-f(x)|\mathrm{d}z$$

$$\sup_{x\in V}|f^\varepsilon(x)-f(x)| \leqslant C\sup_{x\in V}\sup_{y\in B(x,\varepsilon)}|f(x)-f(y)| \to 0, \varepsilon\to 0.$$

(ii) 即证对于任意 $V\subset\subset U$, 成立 $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0}\|f^\varepsilon - f\|_{L^p(V)} = 0$. 取 $V\subset\subset W\subset\subset U$.

由周民强引理 6.6, 对于 $\forall\,\delta>0$, 存在 $g\in C_0(\mathbb{R}^n)$ 满足 $\|f-g\|_{L^p(V)} \leqslant \|f-g\|_{L^p(W)} < \delta$.

$\|f^\varepsilon - f\|_{L^p(V)} \leqslant \|(f-g)^\varepsilon\|_{L^p(V)} + \|g^\varepsilon - g\|_{L^p(V)} + \|g-f\|_{L^p(V)}$

-
- 由 (i), 对于 $\forall\,\delta>0$, 存在 ε 使得 $\|g^\varepsilon - g\|_{L^p(V)} < \delta$.

$\|f^\varepsilon\|_{L^p(V)} \leqslant \|f\|_{L^p(W)}$

(iii) 3 月 24 日 1 小时 3 分 15 秒

按定义, 需要验证对任意紧集 $V \subset U$, 有 $u^\varepsilon \overset{W^{k,p}(V)}{\longrightarrow} u$.

$$\|u^\varepsilon - u\|^p_{W^{k,p}(V)} \triangleq \sum_{|\alpha|\leqslant k} \|D^\alpha u^\varepsilon - D^\alpha u\|^p_{L^p(V)} \overset{(*)}{=} \sum_{|\alpha|\leqslant k} \|\eta_\varepsilon * D^\alpha u - D^\alpha u\|^p_{L^p(V)} \to 0$$

$$(*): D^\alpha_x u^\varepsilon(x) = D^\alpha_x \int_{\mathbb{R}^n} \varepsilon^{-n} \eta\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) u(y)\mathrm{d}y \xlongequal{LDT} \int_{\mathbb{R}^n} \varepsilon^{-n} D^\alpha_x \eta\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) u(y)\mathrm{d}y$$

$$= (-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^n} \varepsilon^{-n} D^\alpha_y \eta\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) u(y)\mathrm{d}y \triangleq \int_{\mathbb{R}^n} \varepsilon^{-n} \eta\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) D^\alpha u \mathrm{d}y = (\eta_\varepsilon * D^\alpha u)(x)$$

□

作业：$f^\varepsilon \to f$ 几乎处处

2.8 截断函数的构造

3 月 14 日 24 分 10 秒

命题 2.8.1. 任意 $\Omega^1 \subset\subset \Omega$, 存在 $\xi \in C_0^\infty(\Omega)$, 满足

$$0 \leqslant \xi \leqslant 1, \quad \xi \equiv \begin{cases} 1 & \Omega' \\ 0 & \Omega^c \end{cases}, \quad |D^\alpha \xi| \leqslant \frac{c_{n,|\alpha|}}{dist(\Omega', \partial\Omega)^{|\alpha|}}.$$

注记. 以前用 $\xi = R^2 - |x|^2$.

证明. 令 $d = \dfrac{1}{3} dist(\Omega', \partial\Omega), \Omega'' = \{x \in \Omega \mid dist(x, \partial\Omega) > 2d\}$.

断言 $\xi(x) = \int_\Omega \eta^\varepsilon(x-y)\chi_{\Omega''}(y)\mathrm{d}y$ 满足要求, 其中 $0 < \varepsilon < d$,$\chi_{\Omega''}$ 为特征函数.

下验证满足要求：

- $\xi \in C_0^\infty(\Omega), x \in \Omega'$
- $\left|\dfrac{x-y}{\varepsilon}\right| \leqslant 1 \Longrightarrow y \in \Omega'' \Longrightarrow \chi(y) = 1 \Longrightarrow \xi(x) \equiv 1$
- $\xi \equiv 1, x \in \Omega'$
- $x \in \tilde{\Omega}^c, \dfrac{|x-y|}{\varepsilon} < 1$,$y \in (\Omega'')^c, \chi_{\Omega''}(y) = 0$
- $0 \leqslant \xi \leqslant 1$
- $\dfrac{\partial \xi}{\partial x_i}(x) = \varepsilon^{-n} \int_\Omega \dfrac{\partial \eta}{\partial x_i}\left(\dfrac{x-y}{\varepsilon}\right)\chi_{\Omega''}(y)\mathrm{d}y$

  $\eta(x) = \eta(|x|)$

  $r = \dfrac{|x-y|}{\varepsilon}, \dfrac{\partial \eta}{\partial x_i}\left(\dfrac{x-y}{\varepsilon}\right) = \dfrac{\partial \eta}{\partial r}\dfrac{\partial r}{\partial x_i} = \dfrac{1}{\varepsilon}\dfrac{(x-y)_i}{|x-y|}\dfrac{\partial \eta}{\partial r}$

  $= \varepsilon^{-n}\varepsilon^{-1}\int_\Omega \dfrac{(x-y)_i}{|x-y|}\dfrac{\partial \eta}{\partial r}\chi_{\Omega''}(y)\mathrm{d}y$

  $\left|\dfrac{\partial \xi(x)}{\partial x_i}\right| = \varepsilon^{-1}\int_\Omega \left|\varepsilon^{-n}\dfrac{\partial \eta}{\partial r}\chi_{\Omega''}(y)\dfrac{(x-y)_i}{|x-y|}\mathrm{d}y\right| \leqslant \varepsilon^{-n-1}\int_\Omega \left|\dfrac{\partial \eta}{\partial r}\left(\dfrac{x-y}{\varepsilon}\right)\right|\mathrm{d}y$

  $z = \dfrac{y-x}{\varepsilon}, \mathrm{d}y = \varepsilon^n \mathrm{d}z$

  $= \varepsilon^{-1}\int_\Omega \left|\dfrac{\partial \eta}{\partial z}(z)\right|\mathrm{d}z \leqslant c_n \dfrac{1}{d}$

  $\left|\dfrac{\partial^\alpha \xi(x)}{\partial x^\alpha}\right| \leqslant \dfrac{c_{n,|\alpha|}}{d^\alpha}$

□

2.9 截断函数的应用

2.9.1 不存在非常值 L^2 调和函数

3 月 14 日 42 分 34 秒

$\Delta u=0$ 在 L^2 中不存在非常数解.

证明. 取截断函数 $\xi(x)=\begin{cases}1 & x\in B_{\frac{R}{2}}(0)\\ 0 & x\in B_R(0)^c\end{cases}$, 有估计 $|\nabla\xi|^2+|\nabla^2\xi|\leqslant\dfrac{c_n}{R^2}$.

方程两边同乘 ξ^2u, 得

$$0=\int_{B_R}\xi^2u\Delta u\mathrm{d}x=\int_{B_R}(\xi^2uu_i)_i-(\xi^2u)_iu_i\mathrm{d}x\overset{\text{散度定理}}{=\!=\!=\!=}-\int_{B_R}(\xi^2u)_iu_i\mathrm{d}x$$

$$\Longrightarrow\int_{B_R}\xi^2|\nabla u|^2\mathrm{d}x\leqslant 2\int_{B_R}|\xi u_i\xi_iu|\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{2}\int_{B_R}\xi^2|\nabla u|^2\mathrm{d}x+2\int_{B_R}u^2|\nabla\xi|^2\mathrm{d}x$$

$$\Longrightarrow\int_{B_R}\xi^2|\nabla u|^2\mathrm{d}x\leqslant 4\int_{B}u^2|\nabla\xi|^2\mathrm{d}x\leqslant\frac{4c_n}{R^2}\int_{B_R}u^2\mathrm{d}x\overset{u\in L^2}{\leqslant}\frac{C_0}{R^2}$$

令 $R\to\infty$,$|\nabla u|\equiv 0$

□

2.9.2 $\Delta u+u^\alpha=0$

3 月 14 日 49 分 30 秒

$\Delta u+u^\alpha=0,u\geqslant 0,1<\alpha<\dfrac{n+2}{n-2}\Longrightarrow u\equiv 0.$

我们只做 $1<\alpha<\dfrac{n}{n-2}$ 的情形.

方程两边同时乘 ξ^p, 其中 ξ 同应用 1,p 为待定系数.

$$\int_{B_R}\xi^pu^\alpha\mathrm{d}x=-\int_{B_R}\xi^p\Delta u\mathrm{d}x\overset{\text{分部积分两次}}{=\!=\!=\!=\!=\!=}-\int_{B_R}u\Delta\xi^p\mathrm{d}x$$

$$\Delta\xi^p=p(p-1)\xi^{p-2}|\nabla\xi|^2+p\xi^{p-1}\Delta\xi$$

$$\leqslant\frac{c_p}{R^2}\int_{B_R}\xi^{p-2}u\mathrm{d}x$$

56 分 55 秒

由 Holder 不等式, $\displaystyle\int_{B_R}\xi^pu^\alpha\mathrm{d}x\leqslant\frac{c_p}{R^2}\int_{B_R}\xi^{p-2}u\mathrm{d}x$

$$ab\leqslant\varepsilon\frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}\varepsilon^{-\frac{p}{q}}$$

$$p=\alpha,q=\frac{\alpha}{\alpha-1}$$

$$\frac{\xi^{p-2}u}{R^2}=\frac{\xi^{\frac{p}{\alpha}}u}{a}\frac{\xi^{p-2-\frac{p}{\alpha}}}{R^2}$$

$$\leqslant\frac{1}{2}\int_{B_R}\xi^pu^\alpha\mathrm{d}x+C_{n,|\alpha|}\left(\frac{\int_{B_R}\xi^{(p-2-\frac{p}{\alpha})\frac{\alpha-1}{\alpha}}}{R^2}\right)$$

$$p=\frac{2\alpha}{\alpha-1}+1$$

$$\leqslant\frac{1}{2}\int_{B_R}\xi^pu^\alpha\mathrm{d}x+c_{n,\alpha}\mathrm{d}x+c_{n,\alpha}R^{-\frac{2\alpha}{\alpha-1}}\int_{B_R}\xi^{p-\frac{2\alpha}{\alpha-1}}\mathrm{d}x$$

作业 2.9.1. $\Delta u+u^{\frac{n}{n-2}}=0\mathbb{R}^n,u\geqslant 0\Longrightarrow u\equiv 0$

证明. 第五次习题课第三题 □

2.9.3 Poisson 方程经典解的能量估计

3 月 14 日 1 小时 11 分 40 秒

设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 为有界区域,$f \in C(\overline{\Omega})$, 考虑方程

$$(*) \qquad -\Delta u = f, \quad x \in \Omega.$$

命题 2.9.2. 设 $\Omega' \subset\subset \Omega$. 那么存在常数 C, 对任意 $u \in C^2(\Omega)$ 是方程 $(*)$ 的解, 成立

$$\|\nabla u\|_{L^2(\Omega')}^2 \leqslant C \left(\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|f\|_{L^2(\Omega)}^2\right).$$

证明. 设 ξ 为 $\Omega' \subset\subset \Omega$ 的截断函数.

- 方程两边同乘 $\xi^2 u$, 得到 $-\int_\Omega \xi^2 u \Delta u \mathrm{d}x = \int_\Omega \xi^2 u f \mathrm{d}x$.
- 对左侧分部积分, 得到想要的项 $\int_\Omega \xi^2 |\nabla u|^2 \mathrm{d}x$:
  $-\int_\Omega \xi^2 u \Delta u \mathrm{d}x = -\int_\Omega \xi^2 u u_{ii} \mathrm{d}x \xlongequal{\text{散度定理}} \int_\Omega (\xi^2 u)_i u_i \mathrm{d}x = 2\int_\Omega \xi \xi_i u u_i \mathrm{d}x + \int_\Omega \xi^2 |\nabla u|^2 \mathrm{d}x.$
  若是 Poisson 方程弱解的能量估计, 便是直接从分部积分后的式子
  $$\int_\Omega u_i v_i \mathrm{d}x = \int_\Omega f v \mathrm{d}x, \quad \forall\, v \in H_0^1(\Omega)$$
  出发, 取测试函数 $v = \xi^2 u$, 得到相同的式子.
- 将想要的项放到左边, 其余的项的甩到右边, 并用右侧替换左侧, 得到
  $\int_\Omega \xi^2 |\nabla u|^2 \mathrm{d}x = \int_\Omega \xi^2 u f \mathrm{d}x - 2\int_\Omega \xi \xi_i u u_i \mathrm{d}x.$
- 逐项估计:
  1. 第一项 $\leqslant \int_\Omega |\xi^2 u f| \mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{2}\int_\Omega \xi^2 u^2 + \xi^2 f^2 \mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{2}\int_\Omega u^2 + f^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2}\|f\|_{L^2(\Omega)}^2.$
  2. 第二项 $\leqslant 2\int_\Omega |\xi \xi_i u u_i| \mathrm{d}x \leqslant \int_\Omega \varepsilon \xi^2 |\nabla u|^2 \mathrm{d}x + \frac{1}{\varepsilon}|\nabla \xi|^2 u^2 \mathrm{d}x$
- $\int_\Omega \xi^2 |\nabla u|^2 \mathrm{d}x \leqslant \int_\Omega \varepsilon \xi^2 |\nabla u|^2 \mathrm{d}x + \left(\frac{1}{2} + \frac{\|\nabla \xi\|_{L^\infty(\Omega)}^2}{\varepsilon}\right)\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2}\|f\|_{L^2(\Omega)}^2.$
  取 $\varepsilon = \frac{1}{2}$, 得 $\int_{\Omega'} |\nabla u|^2 \mathrm{d}x \leqslant \int_\Omega \xi^2 |\nabla u|^2 \mathrm{d}x \leqslant C\left(\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|f\|_{L^2(\Omega)}^2\right).$

□

作业 2.9.3. 将上述结论推广到方程 $-\Delta u + b_i u_i + cu = f$, 其中 $b_i, c, f \in C(\overline{\Omega})$.

证明. $\int_\Omega \xi^2 |\nabla u|^2 \mathrm{d}x = \int_\Omega \xi^2 u f \mathrm{d}x - 2\int_\Omega \xi \xi_i u u_i \mathrm{d}x - \int_\Omega \xi^2 b_i u u_i \mathrm{d}x - \int_\Omega \xi^2 c u^2 \mathrm{d}x$

□

2.9.4 Poisson 方程经典解的高阶内估计

命题 2.9.4. 设 $\Omega' \subset\subset \Omega$. 那么存在常数 C, 对任意 $u \in C^2(\Omega)$ 是方程 $(*)$ 的解, 成立

$$\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega')} \leqslant C\left(\|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \|f\|^2_{L^2(\Omega)}\right).$$

证明. 设 $\Omega' \subset\subset \Omega'' \subset\subset \Omega, \xi$ 是 $\Omega' \subset\subset \Omega''$ 的截断函数.

注记. 为什么要在中间插一层 Ω''? 这里先剧透一下, 到后面估计的时候会出现 $\|\nabla u\|^2_{L^2}$ 这种项, 上一小节告诉我们, 对于任意 $\Omega'' \subset\subset \Omega, \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega'')}$ 可以被 $\|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \|f\|^2_{L^2(\Omega)}$ 控制住; 但对于 $\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)}$ 就没有这样的控制了, 为此我们要在中间插一层 Ω''.

- 方程两边同乘 $\xi^2 u_{11}$, 得到 $-\displaystyle\int_{\Omega''} \xi^2 u_{11} \Delta u \mathrm{d}x = \int_{\Omega''} \xi^2 u_{11} f \mathrm{d}x.$
- 对左侧分部积分两次, 得到想要的项 $\displaystyle\int_{\Omega''} \xi^2 |\nabla u_1|^2 \mathrm{d}x$

  第一次: $-\displaystyle\int_{\Omega''} \xi^2 u_{11} u_{ii} \mathrm{d}x = \int_{\Omega''} (\xi^2 u_{11})_i u_i \mathrm{d}x = 2\int_{\Omega''} \xi\xi_i u_{11} u_i \mathrm{d}x + \int_{\Omega''} \xi^2 u_{11i} u_i \mathrm{d}x$

  第二次: $\displaystyle\int_{\Omega''} \xi^2 u_i u_{11i} \mathrm{d}x = -\int_{\Omega''} (\xi^2 u_i)_1 u_{1i} \mathrm{d}x = -2\int_{\Omega''} \xi\xi_1 u_i u_{1i} \mathrm{d}x - \int_{\Omega''} \xi^2 |\nabla u_1|^2 \mathrm{d}x$
- 将想要的项放到左边, 其余的项的甩到右边, 并用右侧替换左侧, 得到

  $\displaystyle\int_{\Omega''} \xi^2 |\nabla u_1|^2 \mathrm{d}x = -\int_{\Omega''} f\xi^2 u_{11} \mathrm{d}x - 2\int_{\Omega''} \xi\xi_1 u_i u_{1i} \mathrm{d}x + 2\int_{\Omega''} \xi\xi_i u_i u_{11} \mathrm{d}x$

  若两次分部积分的顺序不同, 会得到

  $\displaystyle\int_{\Omega''} \xi^2 |\nabla u_1|^2 \mathrm{d}x = -\int_{\Omega''} f\xi^2 u_{11} \mathrm{d}x - 2\int_{\Omega''} \xi\xi_i u_1 u_{1i} \mathrm{d}x + 2\int_{\Omega''} \xi\xi_1 u_1 u_{ii} \mathrm{d}x$
- 对右边的项进行逐个估计:
  1. 第一项 $\leqslant \dfrac{1}{4}\displaystyle\int_{\Omega''} \xi^2 u_{11}^2 \mathrm{d}x + \int_{\Omega''} \xi^2 f^2 \mathrm{d}x$
  2. 第二项 $\leqslant \dfrac{1}{4}\displaystyle\int_{\Omega''} \xi^2 |\nabla u_1|^2 \mathrm{d}x + 4\int_{\Omega''} |\nabla u|^2 \xi_1^2 \mathrm{d}x \leqslant \dfrac{1}{4}\int_{\Omega''} \xi^2 |\nabla u_1|^2 \mathrm{d}x + 4\int_{\Omega''} |\nabla u|^2 |\nabla \xi|^2 \mathrm{d}x$
  3. 第三项 $\leqslant \dfrac{1}{4}\displaystyle\int_{\Omega''} \xi^2 u_{11}^2 \mathrm{d}x + 4\int_{\Omega''} |\nabla u|^2 |\nabla \xi|^2 \mathrm{d}x$

  注记. *1 和 3 貌似用不到 ε 调.*

□

$$\Longrightarrow \int_{\Omega} \xi^2 |\nabla u_1|^2 \mathrm{d}x \leqslant c(\int_{\Omega''} |\nabla u|^2 \mathrm{d}x + \int_{\Omega} f^2 \mathrm{d}x) \leqslant c(\int |u|^2 \mathrm{d}x + \int |f|^2 \mathrm{d}x)$$

2.10 Poisson 方程经典解的梯度内部有界估计

3 月 17 日 6 分 35 秒

设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 为有界区域,$u \in C^3(\Omega) \cap C(\overline{\Omega}), \Delta u = f, f \in C^1(\overline{\Omega}), \|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leqslant M$.

问：给定 $\Omega' \subset\subset \Omega$,$u$ 在 Ω' 上的振动幅度的大小能不能得到控制？

结论：$\|\nabla u\|_{L^\infty(\Omega')} \leqslant c$, 其中 $c \sim (\Omega', \Omega, \|f\|_{C^0(\overline{\Omega})}, M)$.

注记. 回首过去（*1.3.3* 节）

- 以前的 $\xi = R^2 - |x|^2$, 我们只会处理 Ω' 为球的情形.
- 有调和函数情形的经验, 所以知道辅助函数 φ 该怎么找.

证明. 设 $\Omega \subset \{0 < x_1 < d\}$. 令 $\varphi = \xi^2|\nabla u|^2 + \alpha u^2 + \mathrm{e}^{\beta x_1}$.

如果能选取合适的 $\alpha = \alpha_0$ 和 $\beta = \beta_0$ 使得 $\Delta\varphi \geqslant 0$, 则 φ 在 $\partial\Omega$ 达到最大值, 那么

$$\sup_{\Omega'} |\nabla u|^2 \overset{\xi\equiv 1, x\in\Omega'}{\leqslant} \sup_{\Omega'} \varphi \leqslant \sup_{\Omega} \varphi \xlongequal{\Delta\varphi \geqslant 0} \sup_{\partial\Omega} \varphi \overset{\xi\equiv 0, x\in\partial\Omega}{\leqslant} \alpha_0 M^2 + \mathrm{e}^{\beta_0 d}.$$

$\varphi_i = (\xi^2)_i|\nabla u|^2 + \xi^2(|\nabla u|^2)_i + 2\alpha u u_i + \beta \mathrm{e}^{\beta x_1}\delta_{i1}$.

$\Delta\varphi = \varphi_{ii} = \Delta(\xi^2)|\nabla u|^2 + 2(\xi^2)_i(|\nabla u|^2)_i + \xi^2\Delta(|\nabla u|^2) + 2\alpha|\nabla u|^2 + 2\alpha u\Delta u + \beta^2\mathrm{e}^{\beta x_1}$.

- $\Delta(\xi^2)|\nabla u|^2 = (2\xi\Delta\xi + 2|\nabla\xi|^2)|\nabla u|^2$
- $2(\xi^2)_i(|\nabla u|^2)_i = 8\xi\xi_i u_j u_{ji} \geqslant -2\xi^2|\nabla^2 u|^2 - 8|\nabla\xi|^2|\nabla u|^2$
- $\xi^2\Delta(|\nabla u|^2) = 2\xi^2|\nabla^2 u|^2 + 2\xi^2\nabla u\cdot\nabla f \geqslant 2\xi^2|\nabla^2 u|^2 - |\nabla u|^2 - |\nabla f|^2$
- $2\alpha|\nabla u|^2 = 2\alpha|\nabla u|^2$
- $2\alpha u\Delta u = 2\alpha u f \geqslant -2\alpha M\|f\|_{C^0(\overline{\Omega})}$
- $\beta^2\mathrm{e}^{\beta x_1} \geqslant \beta^2$

$\Delta\varphi \geqslant (2\xi\Delta\xi + 2|\nabla\xi|^2 - 8|\nabla\xi|^2 - 1 + 2\alpha)|\nabla u|^2 - |\nabla f|^2 - 2\alpha M\|f\|_{C^0(\overline{\Omega})} + \beta^2$

取定 $\alpha = \alpha_0$ 充分大使得 $2\xi\Delta\xi + 2|\nabla\xi|^2 - 8|\nabla\xi|^2 - 1 + 2\alpha \geqslant 0$.

再取定 $\beta = \beta_0$ 充分大使得 $\beta^2 - 2\alpha_0 M\|f\|_{C^0(\overline{\Omega})} - |\nabla f|^2 \geqslant 1$.

□

注记. 展望未来：$\Delta u = f$ 会做, 一般的线性椭圆方程也会做.

2.11 Robin 边值问题的有界估计

2.11.1 Laplace 方程

3 月 17 日 35 分 25 秒

设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 为有界区域, 考虑 Robin 边值的 Laplace 方程 $\begin{cases} \Delta u = 0 & x \in \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = -u + \varphi(x) & x \in \partial\Omega \end{cases}.$

我们希望给出解的有界估计.

因为 $\Delta u = 0$, 所以 u 在某点 $x_0 \in \partial\Omega$ 达到最大值, 从而 $\dfrac{\partial u}{\partial n}(x_0) \geqslant 0$.

由 $\partial\Omega$ 上满足的方程知 $-u(x_0) + \varphi(x_0) \geqslant 0 \Longrightarrow u(x_0) \leqslant \varphi(x_0) \leqslant \sup\limits_{\partial\Omega} \varphi$.

因为 $\Delta u = 0$, 所以 u 在某点 $x_1 \in \partial\Omega$ 达到最小值, 从而 $\dfrac{\partial u}{\partial n}(x_0) \leqslant 0$.

由 $\partial\Omega$ 上满足的方程知 $-u(x_1) + \varphi(x_1) \leqslant 0 \Longrightarrow u(x_1) \geqslant \varphi(x_1) \geqslant \inf\limits_{\partial\Omega} \varphi$.

综上所述 $\inf\limits_{\partial\Omega} \varphi \leqslant u \leqslant \sup\limits_{\partial\Omega} \varphi$.

2.11.2 Baby 版本的 Poisson 方程

3 月 17 日 40 分 50 秒

设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 为有界区域, 考虑 Robin 边值的 Poisson 方程 $\begin{cases} \Delta u = 1 & x \in \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = -u + \varphi(x) & x \in \partial\Omega \end{cases}.$

因为 $\Delta u \equiv 1 > 0$, 由相同论证可知 $\sup\limits_{\overline{\Omega}} u \leqslant \sup\limits_{\partial\Omega} \varphi$.

下面来处理 u 的下界估计.

令 $\Phi = u - \alpha|x|^2$.

$\Delta\Phi = \Delta u - 2n\alpha_0$

取 $\alpha_0 = \dfrac{|f|_{C^0(\overline{\Omega})}}{2n}$

$\Delta\Phi \leqslant 0$

Φ 的最小值在 $x_0 \in \partial\Omega$ 达到,

$$0 \geqslant \frac{\partial\Phi}{\partial n}(x_0) = -u(x_1) + \varphi(x_1) - 2\alpha_0 \left\langle x_1, \frac{1}{n} \right\rangle$$

$\Phi(x_1) \geqslant \min u - \alpha_0 \max |x|^2$

$\min u \geqslant \min \Phi + \alpha_0 \max\limits_{\overline{\Omega}} |x|^2 = \Phi(x_1) + \alpha_0 \max |x|^2$

$= u(x_1) - \alpha_0 |x_1|^2 + \alpha_0 \min |x|^2 \geqslant \varphi(x_1) - 2\alpha_0 \langle x_1, \vec{n} \rangle - \alpha_0 |x_1|^2 + \alpha_0 \min |x|^2 \geqslant \inf \varphi - c_0(\Omega)$

作业 1：命题 2.16

$$\begin{cases} \Delta u = f \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = -u + \varphi(x) \end{cases}$$

2.12 Neumann 边值问题的整体梯度估计

3 月 17 日 55 分 28 秒

$$\begin{cases} \Delta u = f(x) \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = \varphi(x) \end{cases}$$

若 $|u|_{L^\infty(\Omega)} M_0$

如 $\partial\Omega \in C^2, \exists d_0 > 0$such that

$$d(x) = dist(x, \partial\Omega)$$

在 Ω_{d_0}

$|\nabla d|^2 = 1$

$|\nabla^2 d| \leqslant C$

$w := u - \varphi d$

$w_n\big|_{\partial\Omega} = u_n + (\varphi_n d + \varphi d_n)$

$= u_n - \varphi \equiv 0$

$\Phi = \log|\nabla w|^2 + h(u) + \alpha_0 d$

$0 \leqslant \dfrac{\partial\Phi}{\partial n}(x_0)$

如 Φ 在 $\partial\Omega$ 上达到最大值

$h(u) = -\log(1 + M_n - u)$

- Φ 在 $x_0 \in \partial\Omega$ 达到极大

  $0 \leqslant \dfrac{\partial\Phi}{\partial n}(x_1) = \dfrac{|\nabla w|_n^2}{|\nabla w|^2} + \ln u_n + \alpha_0 d_n$

  $|\nabla w|_n^2 = (w_n^2 + |\nabla w|^2)_n = |\nabla w|_n^2$

  $|\nabla w| = c^{ji} w_i w_j, c^{ij} = \delta_{ij} - d_i d_j$

  $= (\delta_{ij-d_i d_j}) w_i w_j = |\nabla w|^2 - (\nabla w \cdot \nabla d)^2$

  $|\nabla' w|_n^2 = c^{ij} w_i w_j + 2c^{ij} w_i w_j$

  $u_n = \varphi$ 两边求切向导

  $c^{ij}(u_n - \varphi)_i = 0 \Longrightarrow c^{ij} u_{ni} = c^{ij}\varphi_i$

  $|c^{ij}_{,n}| \leqslant c_0$

  $|\nabla' w|_n^2\big|_{\partial\Omega} \leqslant c_0|\nabla w|^2 + c_1|\nabla w|$

- 对相应 $\Phi(x)$ 在 $x_1 \in \Omega_{d_0}$ 达到极大

  $\Phi_i = \dfrac{|\nabla u|_i^2}{|\nabla w|^2} + h' u_i + \alpha_0 d_i$

  $\dfrac{|\nabla w|_i^2}{|\nabla w|^2} = -(h' u_i + \alpha_0 d_i)$

  $\Delta\Phi = \dfrac{\Delta|\nabla w|^2}{|\nabla w|^2} - \dfrac{|\nabla|\nabla w|^2|^2}{|\nabla w|^4} + h''|\nabla u|^2 + h'\Delta u + \alpha_0 \Delta d$

  $\Delta|\nabla u|^2 = 2(w_j w_{ji})_i = 2\sum w_{ij}^2 + 2\sum w_j(\Delta w)_j$

$$\frac{2\sum w_{ij}^2}{|\nabla w|^2}+\frac{2\sum w_j(\Delta w)_j}{|\nabla w|^2}$$

$$(\sum a_ib_i)^2\leqslant |a|^2|b|^2$$

$$|\sum_j w_jw_{ji}|^2\leqslant |\nabla w|^2|\nabla^2 w|^2$$

3 月 17 日 1 小时 41 分 40 秒

回顾：

应用

3 月 21 日 4 分 18 秒

应用：Dirichlet 问题、Neumann 问题经典解的存在性

但这个学期我们不关心经典解的存在性

Neumann 问题, 内部与近边

Dirichlet 问题, 整体约化到边界与边界

展望一下未来, 同样要问广义解的梯度估计.

- 内估计
- 整体约化到边界

2.13 单位分解

2.13.1 紧集上的单位分解

3 月 17 日 1 小时 55 分 11 秒

应用：证明散度定理、用光滑函数逼近 Sobolev 空间中的函数（处理 $\partial\Omega \in C^1$ 的情形）.

定理 2.13.1. 设 $\{\Omega_i\}_{i=1}^N$ 为紧集 $K \subset \mathbb{R}^n$ 的开覆盖, 则存在开集 $\Omega \supset K$ 和一组函数 $\{\xi_i\}_{i=1}^N$ 满足 $(1)\xi_i \in C_0^\infty(\Omega_i); (2) 0 \leqslant \xi_i \leqslant 1; (3) \displaystyle\sum_{i=1}^N \xi_i(x) = 1, \forall x \in \Omega.$

证明. 3 月 17 日 1 小时 59 分 10 秒——3 月 17 日第二段 9 分 28 秒. □

散度定理

2.13.2 开集上的单位分解

3 月 17 日第二段 13 分 34 秒——16 分 8 秒,18 分 23 秒——19 分 36 秒

应用：用光滑函数逼近 Sobolev 空间中的函数（处理 $\partial\Omega \notin C^1$ 的情形）.

3 月 17 日第二段 16 分 9 秒——18 分 5 秒：定理陈述.

3 月 17 日第二段 19 分 37 秒——25 分 7 秒和 3 月 21 日 12 分 26 秒——20 分 12 秒：证明

定理 2.13.2.

证明. Ω: $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{+\infty} \Omega_i, \Omega_i \subset\subset \Omega, B_1 = \Omega_1 \backslash \bigcup_{i=2}^{+\infty} \Omega_i \subset\subset \Omega_1$

$O_1 = \left\{ x \in \Omega_1 \mid dist(x, B_1) < \dfrac{d}{2} \right\}$

$d = dist(B_1, \partial\Omega_1)$

$B_1 \subset\subset O_1 \subset\subset \Omega_1$

$O_1 \cup \displaystyle\bigcup_{i=2}^{+\infty} \Omega_i$ 仍为 Ω 的开覆盖

$B_2 = \Omega_2 \backslash O_1 \cup \displaystyle\bigcup_{i=3}^{+\infty} \Omega_i$, 闭,$B_2 \subset\subset \Omega_2$, 取 $O_2 = \left\{ x \in \Omega_2 \mid dist(x, B_r) < \dfrac{d_2}{2} \right\}$

$d_2 = dist(B_2, \partial\Omega_2)$

$B_2 \subset\subset O_2 \subset\subset \Omega_2$

$\displaystyle\bigcup_{i=1}^{2} \cup \bigcup_{i=3}^{+\infty} \Omega_i$ 仍为 Ω 的开覆盖

$0 \leqslant \xi_i \leqslant 1, \xi_i \in C_0^\infty(\Omega_i)$

$\varphi_i = \dfrac{\xi_i}{\sum_{i=1}^{+\infty} \xi_i} \Longrightarrow \displaystyle\sum_{i=1}^{+\infty} \varphi_i \equiv 1$

由 Ω 的任一紧集只与有限多个 Ω_i 相交.

$\xi_i \equiv 1, O_i$

$0 \leqslant \xi_i \leqslant 1, \Omega_i$ □

Chapter 3

Sobolev 空间

3.1 Hölder 空间

对于有界闭集来说,

$$\text{连续} = \text{一致连续} \supset \alpha\text{-Hölder 连续} \supset \text{Lipschitz 连续} \supset \text{连续可微}.$$

回忆 Lipschitz 连续是说可以找到一个常数 C 使得

$$|u(x) - u(y)| \leqslant C|x - y|, \quad \forall x, y \in U.$$

这其实是说 $|u(x) - u(y)|$ 可以被 $|x - y|$ 这一阶的无穷小控制住. 而不满足 Lipschitz 连续但一致连续的经典例子是 $\sqrt{x}, x \in [0, 1]$, 因为

$$|\sqrt{x} - \sqrt{y}| = \frac{|x - y|}{|\sqrt{x} + \sqrt{y}|} \leqslant \sqrt{|x - y|}$$

我们发现因变量的差值还是能够用只跟自变量的差值有关的无穷小量控制住, 所以是一致连续的. 但此时我们做不到用 $|x - y|$ 这个阶的无穷小控制住, 因为越靠近 0 函数的斜率越大. 因此我们放宽 Lipschitz 连续的要求, 允许函数插值用一个不那么高阶的自变量差值的无穷小量来控制, 对于 $0 < \alpha \leqslant 1$, 如果存在常数 C 使得

$$|u(x) - u(y)| \leqslant C|x - y|^\alpha, \quad \forall x, y \in U,$$

则称 u 是 α-Hölder 连续的, 记 $u \in C^{0,\alpha}(U)$, 最佳的常数 C 为

$$|u|_{\alpha,U} = \sup_{x \neq y} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\alpha}.$$

例 3.1.1. 验证 $f(x) = |x|^\alpha \in C^{0,\alpha}(-1, +1)$.

为什么要学习 Hölder 空间：

- 在研究经典解时,Hölder 空间是最有用的函数空间.
  - $C^k(U)$ 不好. 对于 Dirichlet 边值的 Possion 方程, 即使 $f \in C(U)$, 也不能保证 $u \in C^2(U)$. 有一个所谓 Dini 连续的条件, 能够保证 $u \in C^2(U)$, 但它用起来不方便.
  - $C^{k,\alpha}(U)$ 好.$f \in C^{0,\alpha}(U) \Longrightarrow u \in C^{2,\alpha}(U)$.
- Sobolev 空间通过 Hölder 空间与经典解联系起来：Sobolev 嵌入定理.

3.2 弱导数

定义 3.2.1. 设 $u, v \in L^1_{loc}(U)$. 称 v 为 u 的 α 阶弱导数, 如果对任意的 $\varphi \in C_0^\infty(U)$ 成立

$$\int_U uD^\alpha\varphi \ \mathrm{d}x = (-1)^{|\alpha|}\int_U v\varphi \ \mathrm{d}x.$$

当 $u \in C^\infty(U)$,$\alpha = (0, \cdots, 1, \cdots, 0)$,

$$\int_U u\varphi_i \mathrm{d}x = \int_U (u\varphi)_i - u_i\varphi \mathrm{d}x = -\int_U u_i\varphi \mathrm{d}x.$$

所以弱导数为普通意义下导数的推广.

弱导数的唯一性

命题 3.2.2. 设 $u, v_1, v_2 \in L^1_{loc}(U)$, 如果 v_1, v_2 都为 u 的 α 阶弱导数, 那么 $v_1 \overset{a.e.}{=\!=} v_2$.

证明. 令 $v = v_1 - v_2$, 那么对于任意 $\varphi \in C_0^\infty(U)$, 成立 $\displaystyle\int_U v\varphi \mathrm{d}x = 0$.

取 $\varphi(x) = \eta^\varepsilon(x), v^\varepsilon(x) = (\eta^\varepsilon * v)(x) \xrightarrow{L^1_{loc}} v$. □

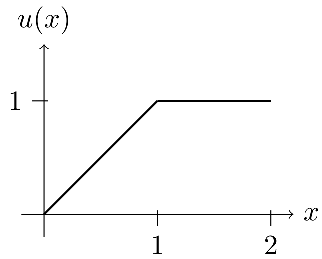
弱导数的存在性

3 月 21 日 56 分 59 秒

例 3.2.3. 计算 $f(x) = |x|, x \in (-1, 1)$ 的弱导数.

例 3.2.4. $u(x) = \begin{cases} x & 0 < x \leqslant 1 \\ 1 & 1 < x < 2 \end{cases}$ 存在弱导数.

证明. 函数图像如下



可以猜测其弱导数为 $v' = \begin{cases} 1 & 0 < x \leqslant 1 \\ 0 & 1 < x < 2 \end{cases}$, 按定义验证如下, 任取 $\varphi \in C_0^\infty(U)$, 有

$$\int_0^2 u\varphi'\mathrm{d}x = \int_0^1 x\varphi'\mathrm{d}x + \int_1^2 \varphi'\mathrm{d}x = -\int_0^1 \varphi\mathrm{d}x + \varphi(1) - \varphi(1) = -\int_0^2 v\varphi\mathrm{d}x.$$

□

例 3.2.5. $g(x) = \begin{cases} x & 0 < x \leqslant 1 \\ 2 & 1 < x < 2 \end{cases}$ 不存在弱导数.

注记. 间断点导致弱导数不存在.

注记. 这很奇怪,$g(x)$ 在实分析的意义下应该是存在导数的, 这样看来弱导数不完全是导数的推广.

例 3.2.6. 设 $u(x) = |x|^\alpha, x \in B_1(0)$. 找 α 的范围使得 u 的一阶弱导数存在.

解. □

3.3 Sobolev 空间

定义 3.3.1. 设 $1 \leqslant p \leqslant \infty$. 设 $U \subset \mathbb{R}^n$ 为开集, $u \in L^1_{loc}(U)$. 称 $u \in W^{k,p}(U)$, 如果 u 的直到第 k 阶弱导数都存在, 且对任意 α 满足 $|\alpha| \leqslant k$, 有 $D^\alpha u \in L^p(U)$. 容易验证 $W^{k,p}(U)$ 构成线性空间.

- 当 $1 \leqslant p < +\infty$ 时, $\|u\|^p_{W^{k,p}(U)} := \sum_{|\alpha| \leqslant k} \int_U |D^\alpha u|^p \mathrm{d}x$.
- 当 $p = +\infty$ 时, $\|u\|_{W^{k,p}(U)} := \sum_{|\alpha| \leqslant k} \mathrm{esssup}_U |D^\alpha u|$.

命题 3.3.2. $W^{k,p}(U)$ 在上述范数下成为赋范线性空间.

定理 3.3.3. $W^{k,p}(U)$ 是 *Banach* 空间.

作业 3.3.4. *Evans* 书 *306* 页的 *2,3.*

命题 3.3.5. 可分性与自反性

命题 3.3.6.

命题 3.3.7. $\mathbb{R}^n$ 上的 $W^{k,p}$ 应该也是 U 上的 $W^{k,p}$

命题 3.3.8. $W^{k,p}$ 中收敛应该蕴含 $D^\alpha u$ 在 L^p 中收敛.

定义 3.3.9. 记 $W^{k,p}_0(U)$ 为 $C^\infty_c(U)$ 在 $W^{k,p}(U)$ 中的闭包.

命题 3.3.10. 当 $p = 2$ 时, 定义

$$\langle u, v \rangle = \sum_{|\alpha| \leqslant k} \int_U D^\alpha u \cdot D^\alpha v \mathrm{d}x.$$

容易验证 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 是 $W^{k,2}(U)$ 上的内积, 并且诱导的范数正是上文定义的范数.

因为 $W^{k,2}(U)$ 是 *Hilbert* 空间, 因此常记作 $H^k(U)$.

3.4 逼近

3.4.1 光滑函数的整体逼近

3 月 24 日 10 分 11 秒

定理 3.4.1. 设 $U \subset \mathbb{R}^n$ 是有界开集,$u \in W^{k,p}(U)$, 其中 $1 \leqslant p < \infty$. 那么存在函数 $u_m \in C^\infty(U) \cap W^{k,p}(U)$ 满足 $u_m \xrightarrow{W^{k,p}(U)} u$.

证明.

1. 记 $U_i = \left\{x \in U \mid \dfrac{1}{i+3} < \operatorname{dist}(x, \partial U) < \dfrac{1}{i+1}\right\}, W_i = \left\{x \in U \mid \dfrac{1}{i+4} < \operatorname{dist}(x, \partial U) < \dfrac{1}{i}\right\}$.

   选取开集 $U_0 \subset\subset U$ 使得 $\{U_i\}_{i=0}^\infty$ 成为 U 的开覆盖. 或许可取 $U_0 = \left\{x \in U \mid \operatorname{dist}(x, \partial U) > \dfrac{1}{3}\right\}$.

   由定理2.13.2, 存在从属于 $\{U_i\}_{i=0}^\infty$ 的单位分解 $\{\xi_i\}_{i=0}^\infty$, 即 $\{\xi_i\}_{i=0}^\infty$ 满足

   - $0 \leqslant \xi_i \leqslant 1$
   - $\xi_i \in C_0^\infty(U_i)$
   - $\displaystyle\sum_{i=0}^\infty \xi_i(x) = 1, \forall\ x \in U$

   任取函数 $u \in W^{k,p}(U)$, 由命题3.3.6, 我们有 $\xi_i u \in W^{k,p}(U)$,$\operatorname{supp} \xi_i u \subset U_i$.

2. 固定 $\delta > 0$. 选取

3.

□

3 月 24 日 29 分 16 秒

作业 3.4.2. $\Delta u + b_i u_i + cu = f$

$\dfrac{\partial u}{\partial n}$

3.4.2 光滑到边函数的整体逼近

3 月 24 日 1 小时 14 分 5 秒

平面几何 $\partial U \in C^1$ 或 Lip

边界最差形状也没有 cusp

优点

引理 3.4.3.

定理 3.4.4. 设 $U \subset \mathbb{R}^n$ 有界区域,$\partial U \in C^1$. 设 $u \in W^{k,p}(U)$, 其中 $1 \leqslant p < \infty$, 那么存在 $u_m \in C^\infty(\overline{U})$ 满足 $u_m \overset{W^{k,p}(U)}{\longrightarrow} u$.

证明. 存在 $\{x_i\}_{i=1}^N \subset \partial U$ 及 $r_i > 0$

$\partial U \subset \bigcup\limits_{i=1}^N B(x_i, \gamma_i)$, 有限覆盖, 因为 ∂U 紧

$V_i = U \cap B(x_i, \frac{r_i}{2}), \exists V_0 \subset\subset U$ such that $U \subset\subset \bigcup\limits_{i=0}^N V_i$

对此覆盖, 有单位分解,$\{\xi_i\}_{i=1}^U$ 上帝的 $\xi_{i=0}^N \xi_i(U) = 1$

$u \to \sum\limits_{i=0}^N (\xi_i u) := \sum\limits_{i=0}^N u^i, u^i = \xi_i u \in W^{k,p}(V_i)$

$U^0 = \xi_0 \cdot u + W^{k,p}(U_0) \to \varepsilon$ 小,$u^{0,\varepsilon} = \eta^\varepsilon * u_0$

且 $\|u^{0,\varepsilon} - u^0\| \overset{\varepsilon \to 0^+}{\longrightarrow} 0$

$2\varepsilon < dist(V_0, \partial U)$

困难之处 $u^i = \xi_i \cdot u \in W^{k,p}(V_i)$

$V_i = U \cap B(x_i, \frac{r_i}{2})$

$\forall x \in V_i, \varepsilon > 0$ 小,$x^\varepsilon := x + \lambda \varepsilon e_n$,$\lambda$ 只与 ∂U 有关一致常数

使得 $B(x^\varepsilon, \varepsilon) \subset U \cap B(x_i, V_i)$, 令 $V_i^\varepsilon = \{x^\varepsilon, x \in V_i\}$

$V_i^\varepsilon \subset\subset \cup \cap B(x_i, r_i)$

对 $u^i, u_\varepsilon^i(x) := u^i(x^\varepsilon), x \in V$

卷积 $\eta^\varepsilon * u_\varepsilon^i(x)$

$\|\eta^\varepsilon * u_\varepsilon^i(x) - u^i\|_{W^{k,p}(V_i)} = \|\eta^\varepsilon * u_\varepsilon^i - u_\varepsilon^i - u_i\|$

$\leqslant \|\eta^\varepsilon * u_\varepsilon^i\|_{W^{k,p}(V_i)} + \|u_\varepsilon^i - u_i\|_{W^{k,p}(V_i)}$

Step3

$u = \sum\limits_{i=0}^N \xi_i u = \sum\limits_{i=0}^N u^i$

$\|\sum\limits_{i=0}^N (r^i - u^i)\|$

□

3.4.3 反例

3 月 24 日 38 分 25 秒

心里想证明：如果 $\forall\, U \subset \mathbb{R}^n$, 其中 U 有界, 不可能都有到 $\mathbb{R}^n$ 的延拓.

再回过头来说明延拓要对 U 加条件

逼近也要加条件

存在有界 $U \subset \mathbb{R}^n$, 使得 $W^{1,p}(U)$ 不能延拓到 $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$

如果 $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, 则 Sobolev 嵌入定理 $u \in L^q(\mathbb{R}^n)$,$1 < q < \dfrac{2n}{n-2}$

目标：找到区域 $u \in W^{1,2}(U)$ 但 $u \notin L^p(\mathbb{R}^2)$

$U = \left\{ x > 0. - x^{1/\theta < y < x^{1/\theta}} \right\}$, 其中 θ 待定

$u(x,y) = x^\alpha \varphi(x,y)$, 其中 φ 是截断函数.

$supp\varphi \subset B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$,$\varphi \equiv 1$,$B_{1/\psi}(0), 0 \leqslant\leqslant 1$

$u(x,y) = x^\alpha \varphi(x,y), u \in C^2, \displaystyle\int_0^1 x^{2\alpha} x^{\frac{1}{\theta}} \mathrm{d}x < +\infty$

$Du \in L^2, D_x u \in L^2 \iff \displaystyle\int_0^1 x^{2(\alpha-1)} x^{\frac{1}{\theta}} \mathrm{d}x < +\infty$

$2(\alpha - 1) + \dfrac{1}{\theta} > -1$

$2\alpha + \dfrac{1}{\theta} > 1$

$u \in L^p(\mathbb{R}^2), \displaystyle\int_0^1 x^{\alpha p} x^{\frac{1}{\theta}} \mathrm{d}x < +\infty$

$\alpha p + \dfrac{1}{\theta} > -1$

$\alpha < 0$

$0 > 2\alpha > 1 - \dfrac{1}{\theta}$

$0 < \theta < 1$

任意 $1 < p < +\infty$ 成立, 矛盾

3.5 限制

引理 3.5.1. *设 X 是赋范线性空间, A 是 X 的稠密子空间, Y 是完备赋范线性空间. 设 $T\colon A\to Y$ 是线性映射, 并且存在 C 使得*

$$(*)\qquad \sup_{x\in A\setminus\{0\}}\frac{\|Tx\|_Y}{\|x\|_X}\leqslant C.$$

那么存在唯一的有界线性映射 $\widetilde{T}\colon X\to Y$, 满足 $\widetilde{T}\big|_A=T$ 且 $\|T\|\leqslant C$.

我们经常对方程加 Dirichlet 边值条件, 在经典的意义下, 即 $u\in C(\overline{U})$ 时,$u\big|_{\partial U}$ 是有意义的, 这是 ∂U 上的一个连续函数. 当 $u\in L^p(U)$ 时,$u\big|_{\partial U}$ 完全没有意义, 因为在 $L^p(U)$ 空间中我们不关心函数在零测集上的行为. 现在问在 $u\in W^{1,p}(U)$ 的情形下该如何理解 $u\big|_{\partial U}=\varphi$? 限制定理给了这个问题一个回答. 在 $\partial U\in C^1$ 时, $C(\overline{U})$ 在 $W^{1,p}(U)$ 中稠密, 后者就是引理3.5.1中的 X, 前者是 A, 这里 Y 取为 $L^p(\partial U)$, T 是经典意义下的限制. 在验证条件 $(*)$ 之后, $\widetilde{T}u$ 就是我们想要的 $u\big|_{\partial U}$.

定理 3.5.2. *设 $1\leqslant p<\infty$. 设 $U\subset\mathbb{R}^n$ 有界, $\partial U\in C^1$. 存在线性算子 $T\colon W^{1,p}(U)\to L^p(\partial U)$ 满足*

(1) *如果 $u\in W^{1,p}(U)\cap C(\overline{U})$, 那么 Tu 就是 $=u\big|_{\partial U}$.*

(2) *存在不依赖于 u 的常数 c 使得 $\|Tu\|_{L^p(\partial U)}\leqslant c\|u\|_{W^{1,p}(U)}$.*

证明. 由引理, 我们只需证明存在常数 c 使得对任意的 $u\in C(\overline{U})$ 有

$$\int_{\partial U}|u|^p\mathrm{d}\sigma\leqslant c\|u\|_{W^{1,p}(U)}.$$

为了将边界上的积分与区域上的积分建立起联系, 我们需要使用散度定理. 在一般的边界上使用散度定理非常麻烦, 所以我们希望考虑平坦边界. 因为不可能把整个 ∂U 都拉平, 所以我们考虑某点 $x_0\in\partial U$ 附近, 存在一小段边界 Γ_1 可以被拉平. 想用散度定理把在 Γ_1 上的积分转化到整个区域上的积分. 但 Γ_1 不是某个区域的完整边界, 所以需要引入截断函数来让散度定理中整个边界上的积分只剩下想要的 Γ_1 的部分. 但截断函数是光滑的, 我们不可能要求在 Γ_1 这一段上值为 1 在另外一段上值为 0, 所以取 Γ_1 含 x_0 的一部分为 Γ_2, 要求截断函数在 Γ_2 上为 1, 在 Γ_1 外的边界上为 0. 假设

$$\Gamma_1=\partial U\cap B(x_0,r)\subset\{x_n=0\},\quad B^+(x_0,r)\subset U,\quad \Gamma_2=\partial U\cap B(x_0,\frac{r}{2}).$$

取截断函数 ξ 在 $B(x_0,\frac{r}{2})$ 上为 1 紧支撑于 $B(x_0,r)$. 记 $x'=(x_1,\cdots,x_{n-1})$

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma_2}|u|^p\mathrm{d}x'=\int_{\Gamma_2}\xi|u|^p\mathrm{d}x'\leqslant\int_{\Gamma_1}\xi|u|^p\mathrm{d}x'&=-\int_{B^+(x_0,r)}(\xi|u|^p)_{x_n}\mathrm{d}x\\&=-\int_{B^+(x_0,r)}|u|^p\xi_{x_n}+p|u|^{p-1}(\operatorname{sgn}u)u_{x_n}\xi\mathrm{d}x\leqslant c\int_{B^+(x_0,r)}|u|^p+|Du|^p\mathrm{d}x\end{aligned}$$

一般的情况下, 根据 $\partial U\in C^1$ 的假设, 有

$$\Gamma_1=\partial U\cap B(x_0,r)=\{(x_1,\cdots,x_{n-1},\gamma(x_1,\cdots,x_{n-1}))\},\quad \Gamma_1\leftrightarrow\tilde{\Gamma}_1,\quad \tilde{\Gamma}_1\subset\{x_n=0\}$$

根据积分的变量替换公式

$$\int_{\Gamma_1}|u|^p\mathrm{d}S\leqslant c\int_{\tilde{\Gamma}_1}|u|^p\mathrm{d}x'.$$

根据以上论证, 我们实际上证明了对任意的 $x_0\in\partial U$, 可以找到 $x_0\in\Gamma\subset\partial U$ 使得

$$\int_{\Gamma}|u|^p\mathrm{d}S\leqslant c\int_U|u|^p+|Du|^p\mathrm{d}x\xRightarrow{\text{再由}\partial U\text{的紧性}}\int_{\partial U}|u|^p\mathrm{d}\sigma\leqslant c\|u\|_{W^{1,p}(U)},\quad\forall u\in C(\overline{U}).$$

□

3.6 延拓

再来说说延拓定理：对于定义在 U 上的 L^p 函数, 我们常通过零延拓来将其变为整个 $\mathbb{R}^n$ 上的 L^p 函数；但这个办法对于 $W^{1,p}$ 函数失效, 因为我们已经在弱导数一节中看到, 本质（无法通过修改零测集上的值来挽救）的不连续性会导致弱导数不存在. 为此我们得找一个合理的延拓方式, 延拓定理就算是为了达到这个目的. 对应到引理3.5.1, 延拓定理的 X, A 与限制定理是相同的, 它的复杂之处在于, 我们没有一个天然的 T, 也就是说对于 $C^\infty(\overline{U})$ 中的函数, 我们并没有一个典范的将其延拓到 $\mathbb{R}^n$ 上的方式, 为此我们必须先给出这样的一个方式（同样是通过紧集上单位分解＋拉平）并验证条件 $(*)$. 值得注意的是, 因为 T 不是典范的, 从而延拓方式其实不是唯一的.

定理 3.6.1. *设 $U \subset \mathbb{R}^n$ 为有界区域, $\partial U \in C^1$. 给定一个开集 V 使得 $U \subset\subset V$, 那么存在有界线性算子 $E\colon W^{1,p}(U) \to W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ 满足*

$$Eu \xlongequal{a.e.} u, x \in U, \quad \operatorname{supp} Eu \subset\subset V.$$

证明.

1. 因为 ∂U 是 C^1 的, 所以对任意 $x \in \partial U$, 存在邻域 W 和 C^1 映射 $\Phi\colon W \to B(0,r)$, 满足

   - Φ 是 C^1 微分同胚, 且 $\det J\Phi \equiv 1$.
   - $\Phi(W \cap \overline{U}) = B_+(0,r)$

   可要求 $W \subset\subset \widetilde{V} \subset\subset V$, 否则取 $\tilde{r}$ 充分小使得 $\widetilde{W} := \Phi^{-1}(B(0,\tilde{r})) \subset\subset \widetilde{V}$, 统统替换之.

2. 因为 ∂U 是紧集, 所以存在 $\{(x_i, W_i, \Phi_i)\}_{i=1}^N$ 如上, 并且 $\partial U \subset \cup_{i=1}^N W_i$.

3. 任取 $u \in C^1(\overline{U})$, 记 $u_i = u\big|_{W_i \cap \overline{U}}, 1 \leqslant i \leqslant N$. 定义 $u_i'\colon B_+(0,r_i) \to \mathbb{R}, y \mapsto u_i(\Phi_i^{-1}(y))$.

   定义
   $$\bar{u}_i' = \begin{cases} u_i'(y) & y \in B_+(0,r_i) \\ -3u_i'(y^1, \cdots, y^{n-1}, -y^n) + 4u_i'(y^1, \cdots, y^{n-1}, -\dfrac{y^n}{2}) & y \in B_-(0,r_i) \end{cases}.$$

   容易验证

   - $\bar{u}_i' \in C^1(B(0,r_i))$
   - 存在常数 c_i, 使得对任意 $u \in C^1(\overline{U}), \|\bar{u}_i'\|_{W^{1,p}(B(0,r_i))} \leqslant c_i \|u_i'\|_{W^{1,p}(B_+(0,r_i))}$.

4. 定义 $\bar{u}_i = \bar{u}_i'(\Phi(x))$, 容易验证, 存在常数 $\tilde{c}_i$, 使得对任意 $u \in C^1(\overline{U})$,
   $$\|\bar{u}_i\|_{W^{1,p}(W_i)} \leqslant \tilde{c}_i \|u\|_{W^{1,p}(U)}.$$

5. 取 $W_0 \subset\subset U$ 使得 $U \subset \cup_{i=0}^N W_i$, 记 $u_0 = u\big|_{W_0}$.

   取 $U \subset \cup_{i=0}^N W_i$ 的一个单位分解 $\{\xi_i\}_{i=0}^N$, 记 $\bar{u} = \sum_{i=0}^N \xi_i \bar{u}_i$, 则 $\bar{u}$ 满足

   - $\bar{u}(x) = u(x), \forall\, x \in U$
   - $\operatorname{supp} \bar{u} \subset \widetilde{V}$

并且存在常数 c, 使得对任意 $u \in C^1(\overline{U})$,$\|\bar{u}\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leqslant c\|u\|_{W^{1,p}(U)}$.

这样我们就对于 $u \in C^1(\overline{U})$ 定义好了 $Eu := \bar{u}$.

6. 因为 $\partial U \in C^1$, 由定理3.4.4, 对任意 $u \in W^{1,p}(U)$, 存在 $u^m \in C^\infty(\overline{U})$ 使得 $u^m \xrightarrow{W^{1,p}(U)} u$.

   因为 $\{u^m\}$ 是 Cauchy 列,$\|Eu\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leqslant c\|u\|_{W^{1,p}(U)}$, 所以 $\{Eu^m\}$ 也是 Cauchy 列.

   定义 $\bar{u} = \lim\limits_{m\to\infty} Eu^m$. 易知 $\bar{u}$ 不依赖于 $\{u^m\}$ 的选取. 定义 $Eu = \bar{u}$.

   - $\|\bar{u} - u\|_{W^{1,p}(U)} = \lim\limits_{m\to\infty} \|Eu^m - u^m\|_{W^{1,p}(U)} = \lim\limits_{m\to\infty} 0 = 0 \Longrightarrow$ 在 U 中 $\bar{u} \overset{a.e.}{=\!=} u$.
   - $\operatorname{supp} Eu^m \subset \widetilde{V} \Longrightarrow \operatorname{supp} \bar{u} \subset \overline{\widetilde{V}} \subset V$.
   - $\|Eu^m\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leqslant c\|u^m\|_{W^{1,p}(U)} \Longrightarrow \|\bar{u}\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leqslant c\|u\|_{W^{1,p}(U)}$.

□

作业 3.6.2. 验算一般 n 维

$$\tilde{u}(x) = \begin{cases} u(x', x_n), x_n \geqslant 0 \\ \sum\limits_{j=1}^{m+1} c_j u(x', -\frac{x_n}{j}), x_n < 0 \end{cases}$$

其中 $\sum\limits_{j=1}^{m_1} c_j(-\frac{1}{j})^k = 0, k = 0, 1, \cdots, m$

3.7 Sobolev 不等式

下面这个不等式说明了在经典意义下一阶导数的 L^p 范数对于 u 本身的某个 L^q 范数的控制, 我们很自然地可以期待更广意义下, 有一阶弱导数的 u 它的 $W^{1,p}$ 范数对于自身的某个 L^q 范数的控制, 那便是下一节的 Sobolev 嵌入定理.

定理 3.7.1 (Gagliardo-Nirenberg-Sobolev 不等式)**.** *设 $1 \leqslant p < n$. 存在只依赖 p, n 的常数 C 使得*

$$\|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leqslant C\|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}, \quad \forall\ u \in C_0^1(\mathbb{R}^n)$$

其中 p^* 为 p 的 Sobolev 共轭, 满足

$$\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n} \Longleftrightarrow p^* = \frac{np}{n-p}.$$

注记. 该不等式对于一般的 $u \in C^1(\mathbb{R}^n)$ 不成立, 比如取 $u \equiv 1$. 但注意 C 与支撑的大小没有关系.

注记. 为什么是 p^*? 假设存在 p, q 使得对于任意的 $u \in C_0^1(\mathbb{R}^n)$ 成立不等式

$$\|u\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leqslant C\|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)},$$

由空间的伸缩不变性, 该不等式对于 $u_\lambda(x) = u(\lambda x)$ 也成立

空间的伸缩不变性! 给定 $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$,$u \neq 0$, 对于 $\lambda > 0$ 定义 $u_\lambda(x) = u(\lambda x)$.

$\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} |u_\lambda|^q \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} |u(\lambda x)|^q \mathrm{d}x \xlongequal[\lambda^n \mathrm{d}x = \mathrm{d}y]{\lambda x = y} \lambda^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} |u(y)|^q \mathrm{d}y$

$\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla(u_\lambda)|^p \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla(u(\lambda x))|^p \mathrm{d}x = \lambda^p \int_{\mathbb{R}^n} |(\nabla u)(\lambda x)|^p \mathrm{d}x = \lambda^{p-n} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u(y)|^p \mathrm{d}y$

$\|u_\lambda\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leqslant C\|\nabla u_\lambda\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \Longleftrightarrow \lambda^{-n/q}\|u\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leqslant C\lambda^{1-n/p}\|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}, \forall\ \lambda > 0.$

$\displaystyle\Longrightarrow 1 - \frac{n}{p} + \frac{n}{q} = 0.$ 记 $\displaystyle p^* = \frac{np}{n-p}.$

证明.

1. 先证明 $p = 1$ 的情形, 即

$$\|u\|_{\frac{n}{n-1}} \leqslant C\|\nabla u\|_1 \Longleftrightarrow \left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{\frac{n}{n-1}}\right)^{\frac{n-1}{n}} \leqslant C\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u| \mathrm{d}x.$$

对任意 $x \in \mathbb{R}^n$ 和 $i = 1, \cdots, n$, 我们有（因为**紧支撑**所以不定积分后面不需要缀额外常数）

$$u(x) = \int_{-\infty}^{x_i} u_i \mathrm{d}y_i \Longrightarrow |u(x)| \leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} |\nabla u|(x_1, \cdots, y_i, \cdots, x_n) \mathrm{d}y_i.$$

对 i 从 1 乘到 n 有

$$|u(x)|^{\frac{n}{n-1}} \leqslant \prod_{i=1}^{n} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |\nabla u| \mathrm{d}y_i\right)^{\frac{1}{n-1}}.$$

关于 x_1 积分有

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} |u|^{\frac{n}{n-1}} \mathrm{d}x_1 &\leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} \prod_{i=1}^{n} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |\nabla u| \mathrm{d}y_i\right)^{\frac{1}{n-1}} \mathrm{d}x_1 \\ &= \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |\nabla u| \mathrm{d}y_1\right)^{\frac{1}{n-1}} \int_{-\infty}^{+\infty} \prod_{i=2}^{n} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |\nabla u| \mathrm{d}y_i\right)^{\frac{1}{n-1}} \mathrm{d}x_1\end{aligned}$$

$$\overset{A.4.2}{\leqslant}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}|\nabla u|\mathrm{d}y_1\right)^{\frac{1}{n-1}}\left(\prod_{i=2}^{n}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}|\nabla u|\mathrm{d}x_1\mathrm{d}y_i\right)^{\frac{1}{n-1}}.$$

关于 x_2 积分有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}|u|^{\frac{n}{n-1}}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\leqslant\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}|\nabla u|\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\right)^{\frac{1}{n-1}}\int_{-\infty}^{+\infty}\prod_{i\neq 2}I_i^{\frac{1}{n-1}}\mathrm{d}x_2,$$

其中

$$I_1:=\int_{-\infty}^{+\infty}|\nabla u|\mathrm{d}y_1,\quad I_i:=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}|\nabla u|\mathrm{d}x_1\mathrm{d}y_i,\quad i=3,\cdots,n.$$

再次使用A.4.2, 就有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}|u|^{\frac{n}{n-1}}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\leqslant\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}|\nabla u|\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\right)^{\frac{1}{n-1}}\prod_{i\neq 2}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}I_i\mathrm{d}x_2\right)^{\frac{1}{n-1}}.$$

继续对 $x_3,\cdots,x_n$ 积分, 最后得到

$$\int_{\mathbb{R}^n}|u|^{\frac{n}{n-1}}\mathrm{d}x\leqslant\prod_{i=1}^{n}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}|\nabla u|\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}y_i\cdots\mathrm{d}x_n\right)^{\frac{1}{n-1}}=\left(\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla u|\mathrm{d}x\right)^{\frac{n}{n-1}}.$$

2.

□

为什么是 p^*

3.8 $p<n$ 的 Sobolev 嵌入定理

$u\in W^{1,p}(U)$

定理 3.8.1. 设 $U\subset\mathbb{R}^n$ 为有界区域, $\partial U\in C^1$. 设 $1\leqslant p<n$, 则存在只依赖 p,n,U 的常数 C 使得

$$\|u\|_{L^{p^*}(U)}\leqslant C\|u\|_{W^{1,p}(U)},\quad \forall\ u\in W^{1,p}(U).$$

证明.

1. 因为 $\partial U\in C^1$, 由延拓定理3.6.1, 存在延拓 $\bar{u}\in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$.
2. 因为 $\bar{u}$ 具有紧支集, 由定理**??**, 存在 $u_m\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ 满足 $u_m\stackrel{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)}{\longrightarrow}\bar{u}$.
3. 由定理3.7.1,
$$\|u_m-u_l\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)}\leqslant C\|Du_m-Du_l\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$
因为 $u_m\stackrel{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)}{\longrightarrow}\bar{u}$, 所以 $\{Du_m\}$ 为 $L^p(\mathbb{R}^n)$ 中 Cauchy 列.
从而 $\{u_m\}$ 为 $L^{p^*}(\mathbb{R}^n)$ 中 Cauchy 列, 记 $u_m\stackrel{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)}{\longrightarrow}\tilde{u}$. 易知 $\bar{u}\xlongequal{a.e.}\tilde{u}, x\in\mathbb{R}^n$.
4. 由定理3.7.1,
$$\|u_m\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)}\leqslant C\|Du_m\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$
令 $m\to\infty$ 得
$$\|\bar{u}\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)}\leqslant C\|D\bar{u}\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\leqslant C\|\bar{u}\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)}\leqslant C\|u\|_{W^{1,p}(U)}.$$
5. $\|u\|_{L^{p^*}(U)}\leqslant\|\bar{u}\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)}\leqslant C\|u\|_{W^{1,p}(U)}$.

□

注记. 由延拓定理*3.6.1*, 我们知道 $\|\bar{u}\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)}\leqslant C\|u\|_{W^{1,p}(U)}$. 但我们不知道 $\|D\bar{u}\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$ 与 $\|Du\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$ 的关系. 所以必须来一步平凡的 $\|D\bar{u}\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\leqslant\|\bar{u}\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)}$, 所以命题右边必须是 $\|u\|_{W^{1,p}(U)}$.

$u\in W_0^{1,p}(U)$

定理 3.8.2 (Poincaré)**.** 设 $U\subset\mathbb{R}^n$ 为有界区域. 设 $1\leqslant p<n$, 那么存在常数 C, 成立

$$\|u\|_{L^{p^*}(U)}\leqslant C\|Du\|_{L^p(U)},\quad \forall\ u\in W_0^{1,p}(U).$$

注记. $u\in W_0^{1,p}(U)$ 的优越之处在于不必延拓便直接有光滑函数逼近. 当然为了用定理*3.7.1*, 光滑函数还是要延拓成 $\mathbb{R}^n$ 上的函数, 但因为它们是紧支撑的, 所以直接零延拓即可.

证明.

1. 因为 $u\in W_0^{1,p}(U)$, 按定义存在 $u_m\in C_0^\infty(U)$ 满足 $u_m\stackrel{W^{1,p}(U)}{\longrightarrow}u$.
2. 将 u_m 零延拓, 仍记作 u_m, 此时 $u_m\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.

3. 由定理3.7.1,$\|u_m - u_l\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leqslant C\|Du_m - Du_l\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = C\|Du_m - Du_l\|_{L^p(U)}$.

   因为 $u_m \overset{W^{1,p}(U)}{\longrightarrow} u$, 所以 $\{Du_m\}$ 为 $L^p(U)$ 中 Cauchy 列.

   从而 $\{u_m\}$ 为 $L^{p^*}(\mathbb{R}^n)$ 中 Cauchy 列, 记 $u_m \overset{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)}{\longrightarrow} \tilde{u}$. 易知 $u \overset{a.e.}{=\!=} \tilde{u}, x \in U$.

4. 由定理3.7.1,$\|u_m\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leqslant C\|Du_m\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = C\|Du_m\|_{L^p(U)}$.

   令 $m \to \infty$ 得 $\|\tilde{u}\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leqslant C\|Du\|_{L^p(U)}$.

5. $\|u\|_{L^{p^*}(U)} \leqslant \|\tilde{u}\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leqslant C\|Du\|_{L^p(U)}$.

$\square$

3.9 Morrey 不等式

引理 3.9.1 (微积分基本定理)**.** *存在常数 C, 使得对于任意 $u \in C^1(\mathbb{R}^n)$, 成立*

$$\fint_{B(x,r)} |u(y)-u(x)|\mathrm{d}y \leqslant C\int_{B(x,r)} \frac{|\nabla u(y)|}{|x-y|^{n-1}}\mathrm{d}y.$$

证明. 固定某点 $\omega \in \partial B(0,1)$. 那么对于 $0<s<r$, 我们有

$|u(x+s\omega)-u(x)| = \left|\int_0^s \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} u(x+t\omega)\mathrm{d}t\right| = \left|\int_0^s \nabla u(x+t\omega)\cdot\omega\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_0^s |\nabla u(x+t\omega)|\mathrm{d}t.$

对 ω 积分得 $\int_{\partial B(0,1)} |u(x+s\omega)-u(x)|\mathrm{d}\sigma(1) \leqslant \int_{\partial B(0,1)}\int_0^s |\nabla u(x+t\omega)|\mathrm{d}t\mathrm{d}\sigma(1)$

$\mathrm{RHS} = \int_0^1\int_{\partial B(0,1)} |\nabla u(x+t\omega)|\mathrm{d}\sigma(1)\mathrm{d}t = \int_0^s\int_{\partial B(x,t)} \frac{|\nabla u(y)|}{t^{n-1}}\mathrm{d}\sigma(t)\mathrm{d}t = \int_{B(x,s)} \frac{|\nabla u(y)|}{|x-y|^{n-1}}\mathrm{d}y$

$\mathrm{LHS} = \frac{1}{s^{n-1}}\int_{\partial B(x,s)} |u(z)-u(x)|\mathrm{d}(s) \leqslant \mathrm{RHS} \leqslant \int_{B(x,r)} \frac{|\nabla u(y)|}{|x-y|^{n-1}}\mathrm{d}y.$

移项并对 s 积分有 $\int_{B(x,r)} |u(y)-u(x)|\mathrm{d}y \leqslant \frac{r^n}{n}\int_{B(x,r)} \frac{|\nabla u(y)|}{|x-y|^{n-1}}\mathrm{d}y.$ □

定理 3.9.2 (Morrey 不等式)**.** *设 $n<p<\infty, \alpha = 1-\frac{n}{p}$. 存在只依赖于 n,p 的常数 C 使得*

$$\|u\|_{C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^n)} \leqslant C\|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)}, \quad \forall\ u\in C^1(\mathbb{R}^n).$$

证明.

1. $|u(x)| \leqslant \fint_{B(x,1)} |u(y)-u(x)|\mathrm{d}y + \fint_{B(x,1)} |u(y)|\mathrm{d}y$
   - 第二项 $\leqslant C\|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$
   - 第一项 $\leqslant C_n\int_{B(x,1)} \frac{|\nabla u(y)|}{|x-y|^{n-1}}\mathrm{d}y \overset{\text{Hölder}}{\leqslant} C_n\left(\int_{B(x,1)}|\nabla u(y)|^p\mathrm{d}y\right)^{1/p}\left(\int_{B(x,1)}\frac{1}{|x-y|^{(n-1)\frac{p}{p-1}}}\mathrm{d}y\right)^{\frac{p-1}{p}}$
     - 前一项 $\leqslant \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$
     - 后一项 $= \left(\int_0^r \rho^{(1-n)\frac{p}{p-1}}\rho^{n-1}\mathrm{d}\rho\right)^{\frac{p-1}{p}}\Bigg|_{r=1} = \left(\int_0^r \rho^{\frac{1-n}{p-1}}\mathrm{d}\rho\right)^{\frac{p-1}{p}}\Bigg|_{r=1} = \left(\frac{p-1}{p-n}\rho^{\frac{p-n}{p-1}}\Big|_0^1\right)^{\frac{p-1}{p}}$

   $|u(x)| \leqslant c(\|u\|_{L^p(B(x,1))} + \|Du\|_{L^p(B(x,1))}) \leqslant C\|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)}$

2. 任取 $x,y\in\mathbb{R}^n$, 记 $r=|x-y|, W = B(x,r)\cap B(y,r)$

   $|u(x)-u(y)| \leqslant \fint_W |u(z)-u(x)|\mathrm{d}z + \fint_W |u(y)-u(z)|\mathrm{d}z$

   $\fint_W |u(z)-u(x)|\mathrm{d}z \leqslant \frac{Vol(B(x,r))}{Vol(W)}\fint_{B(x,r)} |u(z)-u(x)|\mathrm{d}z \leqslant Cr^{\frac{p-n}{p}}\|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$

□

3.10 $p > n$ 的 Sobolev 嵌入定理

定义 3.10.1. 我们称 u^* 是给定函数 u 的一个 *version* 如果 $u^* \xlongequal{a.e.} u$.

定理 3.10.2. 设 $U \subset \mathbb{R}^n$ 是有界开集,$\partial U \in C^1$. 设 $n < p < \infty$, 那么存在常数 C, 成立

$$\|u^*\|_{C^{0,\alpha}(\overline{U})} \leqslant C\|u\|_{W^{1,p}(U)}.$$

其中 u^* 是 u 的一个 *version*,$\alpha = 1 - \dfrac{n}{p}$.

证明.

1. 因为 $\partial U \in C^1$, 由定理3.6.1, 存在延拓 $\bar{u} \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$.
2. 因为 $\bar{u}$ 具有紧支集, 由定理**??**, 存在 $u_m \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ 满足 $u_m \overset{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)}{\longrightarrow} \bar{u}$.
3. 由定理3.9.2,$\|u_m - u_l\|_{C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^n)} \leqslant C\|u_m - u_l\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)}$.
   因为 $u_m \overset{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)}{\longrightarrow} \bar{u}$, 所以 $\{u_m\}$ 为 $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ 中 Cauchy 列.
   从而 $\{u_m\}$ 为 $C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^n)$ 中 Cauchy 列, 记 $u_m \overset{C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^n)}{\longrightarrow} u^*$. 易知 $\bar{u} \xlongequal{a.e.} u^*, x \in U$.
4. 由定理3.9.2,$\|u_m\|_{C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^n)} \leqslant C\|u_m\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)}$.
   令 $m \to \infty$ 得 $\|u^*\|_{C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^n)} \leqslant C\|\bar{u}\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leqslant C\|u\|_{W^{1,p}(U)}$.
5. $\|u^*\|_{C^{0,\alpha}(\overline{U})} \leqslant \|u^*\|_{C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^n)} \leqslant C\|u\|^{W^{1,p}(U)}$.

□

3.11 边值为零的 Poisson 方程弱解的存在唯一性

设 $U \subset \mathbb{R}^n$ 为有界区域,$f \in L^2(U)$, 考虑方程

$$(*) \qquad \begin{cases} -\Delta u = f & x \in U \\ u = 0 & x \in \partial U \end{cases}.$$

定义 3.11.1. 称 $u \in W_0^{1,2}(U)$ 为 $(*)$ 的弱解, 如果对任意的 $\varphi \in W_0^{1,2}(U)$, 成立

$$\int_U \nabla u \cdot \nabla \varphi \mathrm{d}x = \int_U f \varphi \mathrm{d}x.$$

定理 3.11.2. $(*)$ 的弱解存在唯一.

存在性证明一.

(0) 考虑以 $(*)$ 为 Euler-Lagrange 方程的泛函 $J\colon W_0^{1,2}(U) \to \mathbb{R}, J(u) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_U |\nabla u|^2 \mathrm{d}x + \int_U f u \mathrm{d}x$.

(1) 证明 J 是下有界的.

$$\left|\int_U f u \mathrm{d}x\right| \overset{\text{Hölder}}{\leqslant} \|f\|_{L^2(U)}\|u\|_{L^2(U)} \overset{\text{Poincaré}}{\leqslant} c\|f\|_{L^2(U)}\|\nabla u\|_{L^2(U)} \overset{\text{均值}}{\leqslant} \frac{1}{4}\|\nabla u\|^2_{L^2(U)} + c'\|f\|^2_{L^2(U)}$$

$$J(u) \geqslant \frac{1}{2}\|\nabla u\|^2_{L^2(U)} - \left(\frac{1}{4}\|\nabla u\|^2_{L^2(U)} + c'\|f\|^2_{L^2(U)}\right) \geqslant \frac{1}{4}\|\nabla u\|^2_{L^2(U)} - c'\|f\|^2_{L^2(U)} > -\infty$$

(2) 由确界原理, 存在下确界 J_0. 由定义知, 对任意 $k \in \mathbb{N}, \exists\ u_k \in W_0^{1,2}(U)$ 使得 $J_0 \leqslant J(u_k) \leqslant J_0 + \dfrac{1}{k}$. 称 $\{u_k\}$ 为极小化序列, 下证其为 $W_0^{1,2}(U)$ 中 Cauchy 列.

由 Poincaré 不等式, 只需证 $\{Du_k\}$ 为 $L^2(U)$ 中 Cauchy 列.

$$\int_U |Du_k - Du_l|^2 \mathrm{d}x = \int_U 2|Du_k|^2 + 2|Du_l|^2 - |D(u_k + u_l)|^2 \mathrm{d}x$$

$$\int_U |Du_k|^2 \mathrm{d}x = 2J(u_k) - 2\int_U f u_k \mathrm{d}x$$

$$\int_U |Du_k - Du_l|^2 \mathrm{d}x = 4J(u_k) + 4J(u_l) \underline{- 4\int_U f(u_k + u_l)\mathrm{d}x - 2J(u_k + u_l) + 2\int_U f(u_k + u_l)\mathrm{d}x}$$

$$\int_U |Du_k - Du_l|^2 \mathrm{d}x = 4J(u_k) + 4J(u_l) \underline{- 8J\left(\frac{u_k + u_l}{2}\right)} \leqslant 4(J_0 + \frac{1}{k}) + 4(J_0 + \frac{1}{l}) - 8J_0 \to 0.$$

(3) 记 $u_k \overset{W_0^{1,2}(U)}{\longrightarrow} u$, 那么 $\lim\limits_{k\to\infty} J(u_k) = J(u) = J_0$. u 即为弱解.

□

作业 3.11.3. $\begin{cases} -\Delta u + c(x) u = f \in L^2(u) \\ u\big|_{\partial u} = 0 \end{cases}$ $, c(x) \geqslant 0, c(x) \in L^2(U), \exists! u \in W_0^{1,2}(U)$

$\begin{cases} -\Delta u + b_i u_i + c(x) u = f \\ u\big|_{\partial U} = 0 \end{cases}$ 这个方程一般做不出, 才学 *Lax-Milgram* 定理, 思考题

存在性另证二. 同样得到极小化序列 $\{u_k\}$, 但不必证明其为 Cauchy 列, 只证明其为有界列.

$\frac{1}{2}\int_U |Du_k|^2 \mathrm{d}x = J(u_k) - \int_U f u_k \mathrm{d}x \leqslant J_0 + 1 + \frac{1}{4}\|\nabla u\|^2_{L^2(U)} + c'\|f\|^2_{L^2(U)}$

$\int_U |Du_k|^2 \mathrm{d}x \leqslant 4(J_0 + 1 + c'\|f\|^2_{L^2(U)}) < +\infty$

由 Poincaré 不等式,$\{u_k\}$ 为 $W_0^{1,2}(U)$ 中有界列.

由张恭庆定理 2.5.28, 存在子列（仍记作 $\{u_k\}$）弱收敛于 $u \in W_0^{1,2}(U)$.

由周民强定理 6.27,$\int_U |Du|^2 \mathrm{d}x \leqslant \liminf\limits_{k\to\infty} \int_U |Du_k|^2 \mathrm{d}x$.

由弱收敛的定义,$\lim\limits_{k\to\infty} \int_U f u_k \mathrm{d}x = \int_U f u \mathrm{d}x$.

$J_0 \leqslant J(u) \leqslant \liminf\limits_{k\to\infty} J(u_k) \leqslant J_0$. u 即为弱解. □

存在性证明三. □

唯一性证明. 如果有两个解 $u, v \in W_0^{1,2}(U)$, 令 $w = u - v$, 得到 $\begin{cases} -\Delta w = 0 \\ w\big|_{\varphi} = 0 \end{cases}$

$\int_U \nabla w \nabla \varphi \mathrm{d}x = 0, \forall \varphi \in W_0^{1,2}(U)$

$\varphi = w, \int_U |\nabla w|^2 \mathrm{d}x = 0$

再有 P307,11 即得证. □

作业 3.11.4. *P307,11*

3.12 紧嵌入定理

定理 3.12.1. *设 $U \subset \mathbb{R}^n$ 是有界开集, $\partial U \in C^1$. 设 $1 \leqslant p < n, 1 \leqslant q < p^*$, 那么*

$$W^{1,p}(U) \subset\subset L^q(U).$$

证明. 即证若 $\{u_m\}_{m=1}^\infty$ 为 $W^{1,p}(U)$ 中的有界列, 那么存在 $L^q(U)$ 中的收敛子列 $\left\{u_{m_j}\right\}_{j=1}^\infty$.

(0) 找 $\{u_{m_i}\}$. 对角线法

对任意 $\delta = \dfrac{1}{i}, i \in \mathbb{N}$

$\|u_{m_i} - u_{m_j}\|_{L^p(U)} = \|u_{m_i} - u_{m_i}^\varepsilon + u_{m_i}^\varepsilon - u_{m_j}^\varepsilon + u_{m_j}^\varepsilon - u_{m_j}\|_{L^p}$

$\leqslant \|u_{m_i} - u_{m_i}^\varepsilon\|_{L^p(U)}$

- 1+2:N-L+Holder+Sobolev
- 3:Arzela-Ascoli 定理

(1) 收敛速度的一致控制. 收敛是肯定会收敛的, 之所以能知道以一致的速度收敛, 是因为我们还额外知道 $\{u_m\} \subset W^{1,p}(U)$ 并且其范数有一个一致的上界.

首先由插值不等式,

$$\|u_m^\varepsilon - u_m\|_{L^q(V)} \leqslant \|u_m^\varepsilon - u_m\|_{L^1(V)}^\theta \|u_m^\varepsilon - u_m\|_{L^{p^*}(V)}^{1-\theta}.$$

由 Sobolev 不等式和对 $W^{1,p}$ 范数的一致上界, 有

$$\|u_m^\varepsilon - u_m\|_{L^q(V)} \leqslant C\|u_m^\varepsilon - u_m\|_{L^1(V)}^\theta.$$

从而问题转化到对 L^1 范数的估计.

...

(2) 对任意固定的 $\varepsilon > 0$,$\{u_m^\varepsilon\}$ 为一致有界, 等度连续.

- 一致有界.
  $|u_m^\varepsilon(x)| \leqslant \displaystyle\int_{B(x,\varepsilon)} \eta_\varepsilon(x-y)|u_m(y)|\mathrm{d}y = \varepsilon^{-n} \int_{B(x,\varepsilon)} \eta\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)|u_m(y)|\mathrm{d}y| \leqslant \varepsilon^{-n}\|\eta\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}\|u_m\|_{L^1(V)}$
- 等度连续
  $|D_{x_i}u_m^\varepsilon(x)| = \varepsilon^{-n-1}|\displaystyle\int_{B(x,\varepsilon)} \frac{\partial\eta}{\partial x_i}\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)u_m(y)\mathrm{d}y| \leqslant c_0\varepsilon^{-n-1}\|u_m\|_{W^{1,p}(U)}$

□

为什么要延拓？因为要用卷积逼近.

为什么要用卷积逼近而不直接用光滑函数逼近？因为要对逼近的速度有一致的控制.

为什么要对逼近的速度有一致的控制？因为我们是在选定一个 ε 后, 再在 $\{u_m^\varepsilon\}$ 中挑收敛子列.

为什么用卷积逼近就得延拓？因为如果不延拓, 对 $u \in L^p(U)$, 我们只能做到 $u^\varepsilon \xrightarrow{L^p_{loc}(U)} u$.

3.13 Poincaré-Wirtinger 不等式

4 月 11 日 1 小时 30 分 21 秒

$\partial U \in C^1, U \subset \mathbb{R}^n$,$u \in W^{1,p}(U)$, 则

$\left(\int_U |u-u_U|^p \mathrm{d}x\right)^{1/p} \leqslant c_0 \|Du\|_{L^p(U)}$

反证法：若不成立,$v_k := \dfrac{u_k - u_U}{\|u_k - u_U\|_{L^p(U)}}$

有 $u_k \in W^{1,p}$ 使得 $\int_U |u-u_U|^{1/p} \mathrm{d}x \geqslant k\|Du^p$

3.14 Pohozaev 恒等式

命题 3.14.1. 设 $U \subset \mathbb{R}^n$ 为星形区域, 设 u 满足方程

$$\begin{cases} -\Delta u = u^{\frac{n+2}{n-2}} + \lambda u & x \in U \\ u = 0 & x \in \partial U \end{cases}.$$

当 $\lambda \leqslant 0, n \geqslant 3$ 时,$u \equiv 0$.

证明. 设 $f(t) = t^{\frac{n+2}{n-2}} + \lambda t, F(t) = \int_0^t f(s)\mathrm{d}s = \frac{1}{2^*}t^{2^*} + \frac{\lambda}{2}t^2$

- 方程两边同乘 u, 得到 $-\int_U u\Delta u \ \mathrm{d}x = \int_U uf(u)\mathrm{d}x$

  $\mathrm{LHS} = -\int_U uu_{ii}\mathrm{d}x = -\int_U (uu_i)_i - |\nabla u|^2\mathrm{d}x \xlongequal{\text{散度定理}} \int_U |\nabla u|^2\mathrm{d}x$

- 方程两边同乘 $x \cdot \nabla u$, 得到 $-\int_U x \cdot \nabla u\Delta u\mathrm{d}x = \int_U x \cdot \nabla u f(u)\mathrm{d}x$.

  $\mathrm{RHS} = \int_U x_iD_iF(u)\mathrm{d}x = \int_U (x_iF(u))_i - nF(u)\mathrm{d}x \xlongequal{\text{散度定理}} -\int_U nF(u)\mathrm{d}x$

  $\mathrm{LHS} = -\int_U u_ix_iu_{ll} \ \mathrm{d}x = -\int_U (ux_iu_{ll})_i - nu\Delta u - ux_iu_{ill} \ \mathrm{d}x \xlongequal{\text{散度定理}} \int_U nu\Delta u + ux_iu_{ill} \ \mathrm{d}x$

  $= -\int_U nuf(u)\mathrm{d}x + \int_U (ux_iu_{il})_l - u_lx_iu_{il} - u\Delta u \ \mathrm{d}x \xlongequal{\text{散度定理}} -\int_U (n-1)uf(u) + \frac{1}{2}x_i(|\nabla u|^2)_i \ \mathrm{d}x$

  $= (1-n)\int_U uf(u)\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int_{\partial U} |\nabla u|^2(x\cdot\nu)\mathrm{d}\sigma + \frac{n}{2}\int_U |\nabla u|^2\mathrm{d}x$

  $= \left(1 - \frac{n}{2}\right)\int_U uf(u)\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int_{\partial U} |\nabla u|^2(x\cdot\nu)\mathrm{d}\sigma$

$\left(1-\frac{n}{2}\right)\int_U uf(u)\mathrm{d}x + n\int_U F(u)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{\partial U} |\nabla u|^2(x\cdot\nu)\mathrm{d}\sigma$

$\left(1-\frac{n}{2}\right)\int_U u\left(u^{\frac{n+2}{n-2}} + \lambda u\right)\mathrm{d}x + n\int_U \left(\frac{n-2}{2n}u^{\frac{2n}{n-2}} + \frac{\lambda}{2}u^2\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{\partial U} |\nabla u|^2 < x\cdot v > \mathrm{d}\sigma$

$\mathrm{LHS} = \left(1 - \frac{n}{2} + n\cdot\frac{n-2}{2n}\right)\int_U u^{\frac{2n}{n-2}}\mathrm{d}x + \left(1-\frac{n}{2}+\frac{n}{2}\right)\int_U \lambda u^2\mathrm{d}x = \lambda\int_U u^2\mathrm{d}x$

$\lambda\int_U u^2\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{\partial U} |\nabla u|^2 < x, \nu > \mathrm{d}\sigma$ □

作业 3.14.2. 平均曲率

证明. 第十次习题课最后 □

3.15 差商

定义 3.15.1. 设 $u\colon U \to \mathbb{R}$ 局部可积,$V \subset\subset U$.

(1) $\Delta_i^h u(x) := \dfrac{u(x+he_i)-u(x)}{h}$, 其中 $x \in V$,$h \in \mathbb{R}$,$0 < |h| < \operatorname{dist}(V, \partial U)$.

(2) $\Delta^h u := (\Delta_1^h u, \cdots, \Delta_n^h u)$.

引理 3.15.2.

(1) $\displaystyle\int_U u\Delta_i^h \varphi \mathrm{d}x = -\int_U \Delta_i^{-h} u\varphi \mathrm{d}x$

(2) *4 月 14 日 1 小时 51 分 17 秒*

证明. $\displaystyle\int_V u(x)\frac{\varphi(x+he_i)-\varphi(x)}{h}\mathrm{d}x = \int_V u(x)\frac{\varphi(x+he_i)}{h}\mathrm{d}x - \int_V u(x)\frac{\varphi(x)}{h}\mathrm{d}x$
$y = x + he_i$
$\displaystyle\int_V u(y-he_i)\frac{\varphi(y)}{h}\mathrm{d}y - \int_V u(x)\frac{\varphi(x)}{h}\mathrm{d}x = -\int_V \frac{u(x-he_i)-u(x)}{-h}\varphi(x)\mathrm{d}x = -\int_V \nabla_i^{-h} u\varphi \mathrm{d}x$ □

当 u 可导时,$\lim\limits_{h\to 0}\Delta_i^h u = u_i$. 现探究差商与弱导数之间的关系.

命题 3.15.3.

(1) 设 $1 \leqslant p < \infty$,$u \in W^{1,p}(U)$. 那么对任意 $V \subset\subset U$, 存在常数 C, 成立

$$\|\Delta^h u\|_{L^p(V)} \leqslant C\|Du\|_{L^p(U)}, \quad \forall\ 0 < |h| < \frac{1}{2}\operatorname{dist}(V, \partial U).$$

(2) 设 $1 < p < \infty$,$u \in L^p(V)$. 若存在常数 C 使得

$$\|\Delta^h u\|_{L^p(V)} \leqslant C, \quad \forall\ 0 < |h| < \frac{1}{2}\operatorname{dist}(V, \partial U),$$

那么 $u \in W^{1,p}(V)$, 并且

$$\|Du\|_{L^p(V)} \leqslant C.$$

证明.

(1) 由定理3.4.1, 存在 $u_m \in C^\infty(U) \cap W^{1,p}(U)$ 使得 $u_m \to u$ 在 $W^{1,p}(U)$ 中.
因此我们只须对 $u \in C^\infty(U) \cap W^{1,p}(U)$ 做.
由 N-L 公式,$u(x+he_i)-u(x) = u(x+the_i)\Big|_{t=0}^{t=1} = h\displaystyle\int_0^1 \frac{\partial u(x+the_i)}{\partial x_i}\mathrm{d}t$, $|h| < \operatorname{dist}(V, \partial U)$.
两边同除 h, 得到 $(*)$: $|\Delta_i^h u(x)| \leqslant \displaystyle\int_0^1 |D_i u(x+the_i)|\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 |Du(x+the_i)|\mathrm{d}t$

$$\|\Delta^h u\|_{L^p(V)}^p \triangleq \int_V \left(\sum_{i=1}^n |\Delta_i^h u(x)|^2\right)^{\frac{p}{2}} \mathrm{d}x \overset{A.1.1}{\leqslant} C\int_V \sum_{i=1}^n |\Delta_i^h u(x)|^p \mathrm{d}x$$

$$\overset{(*)}{\leqslant} C\sum_{i=1}^n \int_V \left(\int_0^1 |Du(x+the_i)|\mathrm{d}t\right)^p \mathrm{d}x \overset{\text{Hölder}}{\leqslant} C\sum_{i=1}^n \int_V \int_0^1 |Du(x+the_i)|^p \mathrm{d}t\mathrm{d}x$$

$$\xlongequal{\text{Fubini}} C\sum_{i=1}^n \int_0^1 \int_V |Du(x+the_i)|^p \mathrm{d}x\mathrm{d}t \leqslant C\|Du\|_{L^p(U)}^p$$

(2) 由周民强定理 6.28,$\Delta_i^h u$ 在 $L^p(V)$ 中有弱收敛子列 $\Delta_i^{h_\alpha} u \to \tilde{u}_i$.

由周民强定理 6.27,$\|\tilde{u}_i\|_{L^p(V)} \leqslant \liminf\limits_{\alpha \to +\infty} \|\Delta_i^{h_\alpha}\|_{L^p(V)} \leqslant c_0$.

按定义验证 $\tilde{u}_i$ 是 u 的弱导数：任取 $\varphi \in C_0^\infty(V)$,

$\displaystyle\int_V u\varphi_i \mathrm{d}x = \lim_{h\to 0}\int_V u\Delta_i^h \varphi \mathrm{d}x = -\lim_{h\to 0}\int_V \Delta_i^{-h} u\varphi \mathrm{d}x = -\int_V \tilde{u}_i\varphi \mathrm{d}x.$

□

3.16 Poisson 方程弱解的内部正则性

4 月 14 日 1 小时 34 分 38 秒

设 $U \subset \mathbb{R}^n$ 为有界区域,$f \in L^2(U)$, 考虑方程

$$(*) \qquad \begin{cases} -\Delta u = f & x \in U \\ u = 0 & x \in \partial U \end{cases}$$

由边值为零的 Poisson 方程弱解的存在唯一性知, 存在唯一的弱解 $u \in W_0^{1,2}(U)$.

定理 3.16.1. $u \in W^{2,2}_{loc}(U)$.

要证 $\nabla_i^h(D_j u) \in L^2(V), \forall V \subset\subset U$

$\Longrightarrow D_{ij}u \in L^2_{loc}(U), i.e.u \in W^{2,2}_{loc}(U)$

方程两边同乘 $\xi^2 u_{ii}$

$\displaystyle\int_U -\xi^2 u_{ii}\Delta u \mathrm{d}x = \int f\xi^2 u_{ii}\mathrm{d}x$

右 $= \displaystyle\int f\Delta_i^{-h}(\xi^2\Delta_i^h u)\mathrm{d}x$

$\Longrightarrow \displaystyle\int_U \xi^2|\Delta_i^h Du|^2\mathrm{d}x = -\int f\Delta_i^{-h}(\xi^2\Delta_i^h u)\mathrm{d}x - 2\int \xi D\xi\Delta_i^h u\Delta_i^h Du\mathrm{d}x$

$\leqslant \displaystyle\frac{1}{4}\int_U \xi^2|\nabla_i hDu|^2\mathrm{d}x + 4\int_U |\nabla\xi|^2|\Delta_i^h u|^2\mathrm{d}x$

$\leqslant$

Chapter 4

椭圆方程 II

4.1 $H^{-1}(U)$

注记. (0) 回忆 $H_0^1(U)$ 是 $H^1(U)$ 的闭子空间, 因此继承了 $H^1(U)$ 的内积

$$(u,v)_{H^1(U)} = \int_U uv + \sum_{i=1}^n u_i v_i \mathrm{d}x, \quad \forall\ u,v \in H_0^1(U).$$

但 $H_0^1(U)$ 也是 $L^2(U)$ 的闭子空间, 也可以继承 $L^2(U)$ 的内积

$$(u,v)_{L^2(U)} = \int_U uv \mathrm{d}x, \quad \forall\ u,v \in H_0^1(U).$$

容易看出, 恒同映射不是二者之间的同构映射.

将 $H_0^1(U)$ 在 $H^1(U)$ 诱导的内积下的对偶空间记作 $H^{-1}(U)$, 将 $H_0^1(U)$ 在 $L^2(U)$ 诱导的内积下的对偶空间记作 $L^{-1}(U)$. ($L^{-1}(U)$ 是本笔记中的临时记号.)

(1) 给定 $v \in H_0^1(U)$, 可决定 $H_0^1(U)$ 上的两个线性函数

$$\varphi_v(u) = (u,v)_{H^1(U)}, \quad \psi_v(u) = (u,v)_{L^2(U)}.$$

由 *Riesz* 表示引理,$\varphi_v \in H^{-1}(U), \psi_v \in L^{-1}(U)$. 有趣的是, 由于 $\|u\|_{L^2(U)} \leqslant \|u\|_{H^1(U)}$, 所以 $\psi_v \in H^{-1}(U)$, 即 $L^{-1}(U) \subset H^{-1}(U)$. 但一般来说,$H^{-1}(U) \not\subseteq L^{-1}(U)$. 为了看到这一点, 我们只需要找到一串 u^m,$\|u^m\|_{L^2(U)} \equiv 1$, 但 $\|u_i^m\|_{L^2(U)} \geqslant m$. 我相信这样的 u^m 是存在的.

(2) 一般地, 设 X 是 *Hilbert* 空间,X_1 是其闭子空间 (心中想着 $X = L^2(U), X_1 = H_0^1(U)$).

由 *Riesz* 表示引理,$X_1 \cong X_1^*, v \mapsto f_v := (\cdot, v)$. 但对于 $v \in X$, 我们同样可以定义 f_v,f_v 同样落在 X_1^*. 此时这个映射 $X \to X_1^*$ 就不是单射了,$f_v = f_{\tilde{v}}$, 其中 $\tilde{v}$ 是直和分解 $X = X_1 \oplus X_2$ 中 v 的第一分量.

(3) 让我感到比较诡异的现象是, 给定 $v \in L^2(U)$, 存在 $w \in H^1(U)$, 使得对任意 $u \in H^1(U)$,

$$\int_U uv \mathrm{d}x = \int_U uw + u_i w_i \mathrm{d}x.$$

w 的存在性是知道的, 但似乎很难由 v 显式表达出来. 如果能的话我会舒服一点.

诡异的本质是 $H^1(U)$ 上有一个内积在 $L^2(U)$ 上没有定义?

(4) 至于为什么要采取这种诡异的观点, 或许看看弱解的定义就搞懂了, 特别是, 我们是如何将 Lu 视作线性泛函的, 也就是 $B(u,v)$ 是如何定义的.

命题 4.1.1. $\|f\|_{H^{-1}(U)}^2 = \int_U \left(|u|^2 + |Du|^2\right) \mathrm{d}x$

证明. 我想可能用下 Hahn-Banach 定理很快就出来了. □

4.2 散度型椭圆方程弱解的定义

设 $U \subset \mathbb{R}^n$ 为有界区域. 给定 $u \in H_0^1(U)$, 定义

$$Lu = -\left(a_{ij}u_i\right)_j + b_i u_i + cu.$$

其中 a_{ij}, b_i, c 都是 U 上的函数, 我们暂时不管要往上面加什么条件.

u_i 当然是指 u 的弱导数；但 u 没有两阶弱导数, 不管 a_{ij} 条件加得多好,Lu 都不是 U 上函数.

但是, 我们可以将 Lu 视作 $H_0^1(U)$ 上的线性泛函, 形式上

$$\langle Lu, v\rangle = \int_U -\left(a_{ij}u_i\right)_j v + b_i u_i v + cuv \,\mathrm{d}x = \int_U a_{ij}u_i v_j + b_i v + cuv \,\mathrm{d}x =: B(u, v).$$

定义 4.2.1. 设 $f \in H^{-1}(U)$, 称 $u \in H_0^1(U)$ 是方程

$$Lu = f$$

的弱解, 如果两侧作为 $H^{-1}(U)$ 中的元素相等.

4.3 散度型椭圆方程弱解的存在性

4.3.1 Lax-Milgram 定理

定理 4.3.1 (Lax-Milgram)**.** *设 H 为 Hibert 空间, $B\colon H\times H\to\mathbb{R}$ 为双线性映射, 满足*

(1) 存在常数 $\alpha>0$ 使得 $|B(u,v)|\leqslant\alpha\|u\|\|v\|,\forall\ u,v\in H$

(2) 存在常数 $\beta>0$ 使得 $\beta\|u\|^2\leqslant B(u,u),\forall\ u\in H$

若 $f\in H^*$, 则存在唯一 $u\in H$ 使得 $B(u,v)=\langle f,v\rangle:=f(v)$.

例 4.3.2.

- $-\Delta u=f,B(u,v)=\displaystyle\int_U\nabla u\cdot\nabla v\mathrm{d}x,H=H_0^1(U)$
- $-\Delta u+cu=f,B(u,v)=\displaystyle\int_U[\nabla u\nabla v+cuv]\,\mathrm{d}x,W_0^{1,2}(U)$
  - $c\geqslant 0$,(2) 满足
  - *Riesz* 表示定理能够用.$\|u\|_H:=\displaystyle\int_U\left[|\nabla u|^2+cu^2\right]\mathrm{d}x,c\geqslant 0$

对于一般的 L, 条件 (2) 难满足, 但我们有如下的

定理 4.3.3 (能量估计)**.** *存在常数 $\alpha,\beta>0,\gamma\geqslant 0$ 使得,*

(1) $|B(u,v)|\leqslant\alpha\|u\|_{H_1^0(U)}\|v\|_{H_1^0(U)},\forall\ u,v\in H_0^1(U)$

(2) $\beta\|u\|^2_{H_0^1(U)}\leqslant B(u,u)+\gamma\|u\|^2_{L^2(U)},\forall\ u\in H_0^1(U)$

证明. (1) 由 Hölder 不等式显然.

(2) $B(u,u)=\displaystyle\int_U a_{ij}u_iu_j\mathrm{d}x+\int_U b_iu_iu\mathrm{d}x+\int_U cu^2\mathrm{d}x$

- 第一项 $\geqslant\lambda\displaystyle\int_U|\nabla u|^2\mathrm{d}x$
- $\big|$第二项$\big|\leqslant C\displaystyle\int_U|\nabla u||u|\mathrm{d}x\leqslant\frac{\lambda}{2}\int_U|\nabla u|^2\mathrm{d}x+C\int_U|u|^2\mathrm{d}x$
  第二项 $\geqslant-\dfrac{\lambda}{2}\displaystyle\int_U|\nabla u|^2\mathrm{d}x-C\int_U|u|^2\mathrm{d}x$
- 第三项 $\geqslant -C\displaystyle\int_U|u|^2\mathrm{d}x$

$$B(u,u)\geqslant\frac{\lambda}{2}\int_U|\nabla u|^2\mathrm{d}x-C\int_U|u|^2\mathrm{d}x\Longrightarrow B(u,u)+\gamma\|u\|^2_{L^2}\geqslant\frac{\lambda}{2}\|u\|^2_{H_0^1(U)},\text{ 其中 }\gamma=C+\frac{\lambda}{2}.$$

□

注记. *$L_\mu u=Lu+\mu u\mu\geqslant\gamma$, 则 $B_\mu(u,v)=B(u,v)+\mu(u,v)_{L^2(U)}$ 满足 Lax-Milgram 定理的条件.*

4.3.2 Fredholm 理论

Lax-Milgram 定理对我们有什么帮助呢？初看起来, 似乎一点用都没有. 但破局之处就藏在看似平凡的等价转化中.

$$
\begin{aligned}
\text{方程存在弱解 } u &\iff B(u,v)=(f,v), \quad \forall\, v\in H_0^1(U)\\
&\iff B(u,v)+\gamma(u,v)=(f,v)+\gamma(u,v) \quad \forall\, v\in H_0^1(U)\\
&\iff B_\gamma(u,v)=(f+\gamma u,v) \quad \forall\, v\in H_0^1(U)\\
&\iff u=L_\gamma^{-1}(\gamma u+f)
\end{aligned}
$$

在我们的问题中,$H=L^2(U), K=?, K^*=?$

现在来找 K. 令 $\mu=\gamma$, 在上面的“已知”处.

$\mathscr{L}_\gamma u=\mathscr{L}u+\gamma u$

令 $K=(\mathscr{L}_\gamma)^{-1}$

4 月 21 日 32 分 32 秒, 验证 K 为紧算子.

问 K 是否是 $L^2(U)$ 到 $L^2(U)$ 的紧算子.

K 线性

$u=Kf=(L_\gamma)^{-1}f$

给定 $c_1f_1+c_2f_2$, 问解是否是 $c_1u_1+c_2u_2$, 这是由存在唯一行保证的。

我想逆映射的良定性也是由存在唯一性保证的.

$K\colon L^2(U)\to L^2(U)$ 紧.

$u=Kf, L^2(U)\to L^2(U)$

$\mathscr{L}_\gamma u=\mathscr{L}u+\gamma u=f$

令测试函数 $v=u\in H_0^1(U)$

$B(u,u)+\gamma\|u\|_{L^2}^2=(f,u)_{L^2(U)}\leqslant\|f\|_{L^2}\|u\|_{L^2}\leqslant c_0\|f\|_{L^2}\|u\|_{H_0^1(U)}$

$B(u,v)+\gamma(u,v)_{L^2}=(f,v)_{L^2}$

$\Longrightarrow \|u\|_{H_0^1(U)}\leqslant c_1\|f\|_{L_2}$ 有界

紧性 $u\colon H_0^1(U)\to L^2(U)$ 紧,$K\colon L^2(U)\to H_0^1(U)\hookrightarrow L^2(U)$

有界线性算子复合紧算子是紧算子.

4 月 21 日 43 分 24 秒, 找 K^*

$K^*\colon H\to H$

$\mathscr{L}\to\mathscr{L}^*, \mathscr{L}_\gamma^* u:=\mathscr{L}^*u+\gamma u, K^*:=(\mathscr{L}_\gamma)^{-1}\colon L^2(U)\to L^2(U)$ 紧线性

$\mathscr{L}^*$,$b_i\in C^1(U), B(u,v)=\displaystyle\int_U [a_{ij}(x)u_iv_j+b_iu_iv+cuv]\,\mathrm{d}x=B^*(v,u),\forall u,v\in H_0^1(U)$

$b_iu_iv=(b_ivu)_i-b_iv_iu-b_i$

$$\int\Big[a_{ij}u_iv_j-b_iv_iu+(c-\sum b_{i,i})vu\Big]\,\mathrm{d}x=:B(v,u)$$

对应的 $\mathscr{L}^*v=-\sum(a_{ij}(x)v_i)_j-b_iv_i+(c-\displaystyle\sum_{i=1}^n b_{i,i})v$

存在唯一性, 因此 $B(u,u)=B^*(u,u)$

$$\begin{cases} L+\gamma^*v:=\mathscr{L}u+\gamma v=f\in L^2(U)\\ v\big|_{\partial U}=0\end{cases} \quad \gamma \text{ 与以前同, 存在唯一解 } v\in H_0^1(U)$$

$\beta\|v\|_{H_0^1(U)}^2\leqslant B_\gamma^*(v,v)=B^*(v,v)+\gamma\|v\|_{L^2}^2$

$K^*f := (L_\gamma^*)^{-1}(f)$

$(kf, v)_{L^2(g)} = (f, K^*g)_{L^2(U)}$

1 小时 15 分 32 秒, 讲一个例子

例题 $\begin{cases} x''(t) + \lambda x(t) = 0, t \in [0,1] \\ x(0) = x(1) = 0 \end{cases}$

$x(t) = c_1 \sin(\sqrt{\lambda} t) + c_2 \cos(\sqrt{\lambda} t)$

$x(0) = 0 \Longrightarrow c_2 = 0$

$x(1) = 0 \Longrightarrow \sqrt{\lambda} = k\pi, k \in N^+$

$\lambda_k = (k\pi)^2$

方程有非零解的充分必要条件是 $\lambda_k = (k\pi)^2$

如 $\lambda \neq \lambda_k$, 只有零解.

$\begin{cases} x''(t) + \lambda_k x(t) = f(t), [0,1] \\ x(0) = x(1) = 0 \end{cases}$

问 $f(t)$ 满足何种条件方程存在唯一解（模去零空间后）

$\begin{cases} x''(t) + \lambda x(t) = f \\ x(0) = x(1) = 0 \end{cases}$ 任意 f 存在唯一解.

$\lambda_1 = \pi^2, x(t) = \sin(\pi t), x''(t) + \pi^2 x(t) = f(t), x(0) = x(1) = 0$

如果能解, 方程两边同乘 $\sin \pi(t)$,

左 $= \int_0^1 \sin(\pi t) x''(t) \mathrm{d}t + \pi^2 \int_0^1 \sin(\pi t) x(t) \mathrm{d}t$

$\gamma = 1 + \lambda$

$L_\gamma u = -u'' - \lambda u + \gamma u$

$\begin{cases} L_\gamma u = f \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$ 存在唯一解 $u \in H_0^1(0,1)$

$L^* v = -v'' - \lambda v, (L_\gamma^*)^{-1} = K^*$

H, K, K^*,Fredholm 二择一成立

$L_\gamma u = -u'' - \lambda u + \gamma u$

$L_\gamma u = f + \gamma u$ 两边作用 L_γ^{-1}

$u = (L_\gamma)^{-1}(f) + \gamma(\mathscr{L}\gamma)^{-1} u$

$h = (\mathscr{L}_\gamma)^{-1}(f) \in L^2(0,1)$

$u = Ku + h, K := \gamma(L\gamma)^{-1}$

$N(I - K)$ 有限维

$u - Ku = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} -u'' - \lambda u = - \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$

1 小时 51 分 9 秒, 回到偏微分方程

由 Fredholm 二择一, 翻译出来,

(3) $N(I - K)$ 有限维

$u - Ku = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} Lu = 0 \\ u\big|_{\partial U} = 0 \end{cases}$, 解空间有限维

$K\colon L^2 \to H_0^1(U) \hookrightarrow L^2(U)$

(4) 如果 $N(I-K)=0$, 即 $\begin{cases} \mathscr{L}u=0 \\ u\big|_{\partial U}-0 \end{cases}$ 只有零解.

$\begin{cases} \mathscr{L}u=f \\ u\big|_{\partial U}=0 \end{cases}$ 存在唯一解 $u\in L^2$

(5) $\dim N(I-K)=\dim N(I-K^*)$, 引进 K,K^*,H

$\mathscr{L}u=0, u\big|_{\partial U}=0$

$\mathscr{L}^*v=0$

解空间维数相等

(2) $R(I-K)$ 闭 $\Longleftarrow K$ 紧

(1) $(N(I-K^*))^{|}=R(I-K)$

$u-Ku=h\in R(I-K)$

$v\in N(I-K^*), i.e. v-K^*v=0$

$\begin{cases} \mathscr{L}^*v=0 \\ v\big|_{\partial U}=0 \end{cases}$

$(h,v)_{L^2}=((L_\gamma)^{-1}(f),v)_{L^2}$

4 月 21 日第二段 4 分 47 秒, 例题

4.3.3 Riesz-Shauder 定理

4 月 21 日第二段 13 分 44 秒

4.4 散度型椭圆方程弱解的内部 H^2 正则性

回忆Poisson 方程弱解的内部正则性

准备工作

4 月 25 日 20 分 32 秒

证明. 4 月 25 日 35 分 11 秒 □

4.5 Cacciopolli 不等式和 Widman 填洞技巧

4 月 28 日 5 分 0 秒, 内容提要

-

4 月 28 日 11 分 23 秒, 上节课命题

4 月 28 日 31 分 13 秒——1 小时 1 分 34 秒

4.6 散度型椭圆方程弱解的边界正则性

4 月 28 日 1 小时 2 分 3 秒

4 月 28 日第 2 段 28 分 25 秒

作业 4.6.1.

证明. $\tilde{\varphi} = |x|^{n-1}x \cdot \nabla u, \Delta\tilde{\varphi} \equiv 0 \mod (\nabla\tilde{\varphi})$

$\tilde{\varphi} = (|x|^2)^{a/2}x \cdot \nabla u, \tilde{\varphi}_i = |x|^a_i x \cdot \nabla u + |x|^a(x \cdot \nabla u)_i$

$\Delta\varphi = \Delta|x|^a(x \cdot \nabla u) + 2|x|^a_i(x \cdot \nabla u) + |x|^a\Delta(x \cdot \nabla u) = 0$

$(|x|^2)^{\frac{a}{2}}_i = \dfrac{a}{2}(|x|^2)^{\frac{a}{2}-1}|x|^2_i = a(|x|^2)^{\frac{a}{2}-1}$

$\Delta|x|^a = na|x|^{a-2} + a \cdot (\dfrac{a}{2} - 1)(|x|^2)^{\frac{a}{2}-2}2x_i^2$

$= [na + a(a-2)]|x|^{a-2}$

$1 = a(n + a - 2)|x|^{a-2}x \cdot \nabla u$

$\tilde{\varphi}_i \equiv 0 \Longrightarrow a|x|^{a-2}x_i = -|x|^a(x \cdot \nabla u)_i \Longrightarrow |x|^2(x, \nabla u)_i = -ax_i$

$2 = 2a|x|^{a-2}x_i \left\langle x, \nabla u\right\rangle_i = 2a|x|^{a-4}x_i|x|^2 \left\langle x, \nabla u\right\rangle_i = -2a^2|x|^{a-2} \left\langle x, \nabla u\right\rangle$

$\Delta\tilde{\varphi} = a|x|^{a-2} \left\langle x, \nabla u\right\rangle [n + a - 2 - 2a] = a(n - 2 - a)\dfrac{\tilde{\varphi}}{|x|^2}$

取 $a = n - 2$ □

作业 4.6.2.

证明. 5 月 5 日 45 分 25 秒——1 小时 14 分 18 秒

因为所有计算固定在某一点

$\Delta\varphi \leqslant c_1|\nabla\varphi| + c_2\varphi$ 在 $B_\varepsilon(x_0)$ 中,$\varphi(x_1) = 0 \Longrightarrow \varphi \equiv 0$

若存在 $x_0 \in U$ 使得 $\varphi(x_0) = 0$, 目标 $\varphi \equiv 0$ 在某个邻域 $B_\varepsilon(x_0)$

那么 $E = \{x \in U \mid \varphi(x) = 0\}$ 即开又闭.

在 x_1 做计算, 取坐标使得 $|\nabla u| = u_1 > 0$

$\varphi(x_1) = u_{22}u_1^2 \Longrightarrow u_{22} = \dfrac{\varphi}{u_1^2}$

$\varphi_i = -2u_{1i}u_2u_{12} - 2u_1u_{2i}u_{12} + u_{11i}u_2^2 + 2u_{11}u_2u_{2i} + u_{22i}u_1^2 + 2u_{22}u_1u_{1i}$ 在 x_1 处

$\varphi_i = -2u1u_{2i}u_{12} + u_{22i}u_1^2 + 2u_{22}u_1u_{1i}$

$\varphi_1 = -2u_1u_{12}^2 + u_{221}u_1^2 + 2u_1u_{11}u_{22}$

$\varphi_2 = -2u_1u_{22}u_{12} + u_{222}u_1^2 + 2u_1u_{12}u_{22} = u_{222}u_1^2$

□

作业 4.6.3.

4.7 复杂的例子

5 月 5 日第十一周周四

作业 1：

近边估计 $\int_{U\cap B(0,r)} |\nabla u|^2 \mathrm{d}x \leqslant c_0 \left(\|u\|^2_{L^2(U)} + \|f\|^2_{L^2(U)}\right)$

$\xi^2 u$ 代入即可.

内估计 $\int_W |\nabla u|^2 \mathrm{d}x \leqslant c_0 \left(\|u\|^2_{L^2(U)} + \|f\|^2_{L^2(U)}\right)$

336 页 51 式

4.7.1 9.5.1

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \\ u\big|_{\partial U_0} = 0 \\ u\big|_{\partial U_1} = 0 \end{cases}$$

U_0, U_1 凸的有界区域

$\varphi = x \cdot \nabla u, \Delta\varphi \equiv 0$

$\varphi\big|_{\partial U} < 0 \Longleftarrow$Hopf 引理＋ U 星形

4.7.2 title

5 月 5 日 24 分 11 秒

U_0, U_1 有界凸区域 $\Longrightarrow u$ 的等高线为凸曲线（将用两个办法来证明）

方法一

已知 $|\nabla u| \neq 0$ 在 U 中（之前用了两个办法证明）

那么我怎么去证等高线是凸曲线呢？我们找到了这样一个辅助函数（回忆作业1.1.2）

$\varphi = \dfrac{u_{11}u_2^2 + u_{22}u_1^2 - 2u_1u_2u_{12}}{|\nabla\varphi|^4}, \Delta\varphi = 0, \varphi\big|_{\partial U} = \dfrac{k}{|\nabla u|} > 0$

$u(x_1, x_2) = \dfrac{1-|x|^2}{2}$ 在 $B_1(0) \subset \mathbb{R}^2$ 中

规定：$\nu = \dfrac{\nabla u}{|\nabla u|}$ 为计算曲率的方向.

$k = \dfrac{2u_1u_2u_{12} - u_{11}u_2^2 - u_{22}u_1^2}{|\nabla u|^3}$

$u = \dfrac{1-|x|^2}{2}, k = \dfrac{1}{|x|}$

方法二

5 月 5 日 40 分 5 秒

怎么用强极大值原理来证明 u 的等高线是凸的.

5 月 5 日 1 小时 14 分 29 秒

作业 4.7.1. 内容...

5 月 5 日 1 小时 24 分 10 秒现在来证明等高线为凸

证明. 5 月 5 日 1 小时 27 分 43 秒

(1) $\tilde{U}_0, \tilde{U}_1$ 为圆盘, 等高线为圆盘

调和函数解唯一, 用径向函数直接把解找出啦

(2) 一般情形

$B_0 \supset U_0, B_1 \subset U_1$

$U_0^t = (1-t)B_0 + tU_0$

$U_1^t = (1-t)B_1 + tU_1$

$U^t = U_0^t \backslash U_1^t$

若 $0 < t_0 < 1$ 为 u^t 的等高线曲率第一次出现零点.

由引理等高线曲率恒为零.

□

4.7.3 title

1 小时 52 分 21 秒

注记. 原始论文

$$v = -\sqrt{u} \text{ 严格凸}$$

$$\begin{cases} v\Delta v = -(1+|\nabla v|^2) \\ v\big|_{\partial U} = 0 \\ v < 0 \end{cases} \qquad \text{在 } U \subset \mathbb{R}^2 \text{ 中凸, 证明 } v \text{ 严格凸}$$

$$v_i = -\frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}u_i$$

$$|\nabla u|^2 = \frac{|\nabla u|^2}{4u}$$

引理 4.7.2. *$\varphi = v_{11}v_{22} - v_{12}^2$ 则 $\varphi \equiv 0$ 或 $\varphi > 0$, 一致估计.*

4.8 上下解方法

4.8.1 内容提要

5 月 9 日 8 分 52 秒, 开始上课
内容提要

- 弱解的极值原理及应用

  为什么要讲这个

  - 估计 $\Longrightarrow$ 存在性
  - 理论完整性

  目标：$\begin{cases} \Delta u = \sin u + f(x) & x \in U \\ u = 0 & x \in \partial U \end{cases}$ 存在唯一解

  应用：$\begin{cases} -\Delta u = 1 - |u| & x \in U \\ u = 0 & x \in \partial U \end{cases}$ 存在解

  以前会做 $\begin{cases} -(a_{ij}u_i)_j + b_i u_i + c(x)u = f(x) & x \in U \\ u = 0 & x \in \partial U \end{cases}$

  这两个方程,$\sin u$,$|u|$ 都用不来.

  还可以看看 $\begin{cases} -\Delta u = u(a-u) \\ u = 0 \end{cases}$,$u > 0$,u 有界（通常可以去掉）, 存在唯一解当且仅当 $a > \lambda_1$,

  其中 $\lambda_1 = \inf \dfrac{\int_U |\nabla u|^2 \mathrm{d}x}{\int_U u^2 \mathrm{d}x}$.

  这节课的目的就是这三个非线性的例题会做

-
  - 线性：$\begin{cases} \Delta u = f \\ u = 0 \end{cases}$
  - 拟线性：
    * $\begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} D_i \left(\frac{u_i}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}} \right) = f(x) \\ u = \varphi \end{cases}$

      $a_{ij}(x) = \delta_{ij} + \dfrac{u_i u_j}{1+|\nabla u|^2}$

      引进 $v = \sqrt{1+|\nabla u|^2}$

      方程变为 $a^{ij}(\nabla u)u_{ij} = v^3 f(x)$

      梯度出现在 a^{ij} 里, 叫做拟线性
    * $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} (|\nabla u|^{p-2}u_i)_i = f(x)$

      $|\nabla u|^{p-4}\left[|\nabla u|^2\delta_{ij} + (p-2)u_i u_j\right] u_{ij} = f$

      回忆 Sobolev 不等式

$\int |u|^{\frac{np}{n-p}} \leqslant c_{n,p} \int |\nabla u|^p \mathrm{d}x$
的极值函数
$\Delta_p u + u^{p^*-1} = 0$

  * 调和映照方程组（林芳华）$\Delta u = |\nabla u|^2 u$
  * Yang-Mills 方程组（田刚）

- 半线性（今天研究的都是半线性）
  $\Delta u = f(x,u)$.
  * $p=2$, 临界指标 $\Delta u + u^{\frac{n+2}{n-2}}$, 太难, 要用极小曲面来做
  * 不是临界指标（今天的都是）的都好办

5 月 9 日 26 分 55 秒
回忆

- 经典解, 上调和函数,$\Delta u \leqslant 0$
  引进上解（有边值）,$\begin{cases} \Delta u \leqslant 0 \\ u \geqslant \varphi \end{cases}$ 称它为 $\begin{cases} \Delta v = 0 \\ v = \varphi \end{cases}$ 的上解, 指 $u \geqslant v$
- 5 月 9 日 30 分 18 秒
  弱解时, 上（下）解如何定义
  - $\Delta u \leqslant 0$ 换成
  $$\int \nabla \varphi \nabla u \mathrm{d}x \geqslant 0, \forall \varphi \geqslant 0, \varphi \in H_0^1(U)$$
  - $u \geqslant \varphi$, 迹意义下

定义 4.8.1. *称 $\bar{u} \in H^1(U)$ 为方程 $\begin{cases} -\Delta u = f(u) \\ u = 0 \end{cases}$ 的弱上解, 如果*

$$\int_U D\bar{u} D v \mathrm{d}x \geqslant \int_U f(\bar{u}) v \mathrm{d}x, \forall v \in H_0^1(U), v \geqslant 0$$

弱下解,$\underline{u}$, 指 $\underline{u} \in H^1(U)$ 且

$$\int_U D\underline{u} D v \mathrm{d}x \leqslant \int_U f(\underline{u}) v \mathrm{d}x \forall v \in H_0^1(U), v \geqslant 0$$

5 月 9 日 38 分 34 秒, 方程

4.8.2 主要定理

5 月 9 日 40 分 27 秒, 定理陈述
5 月 9 日 53 分 49 秒, 定理证明

定理 4.8.2. *若方程 (1) 存在弱上解 $\bar{u}$ 和弱下解 $\underline{u}$, 且 $\underline{u} \leqslant 0, \bar{u} \geqslant 0 \partial U, \underline{u} \leqslant \bar{u}$ 则方程 (1) 存在弱解 u 且 $\underline{u} \leqslant u \leqslant \bar{u}$*

工具：

- 弱解的极值原理
- 控制收敛
- 能量估计（弱收敛子列, 子列极限就是弱解）

弱解的极值原理

$$\begin{cases} -\Delta u \geqslant 0 \\ u \geqslant 0 \end{cases}$$

$$\int \nabla u \nabla u \mathrm{d}x \geqslant 0$$

$\forall v \geqslant 0, v \in H_0^1(U)$

要证 $u \geqslant 0$

308 页 18 题告诉我们,$\nabla u^- = \begin{cases} 0 & u \geqslant 0 \\ -Du & u < 0 \end{cases}$

$0 \leqslant \int_U \nabla u^- \nabla u \mathrm{d}x$

所以 $u < 0$ 的集合零测.

证明. $|f'(t)| \leqslant \lambda \Longrightarrow f(t) + \lambda t$ 单调递增

(1) 弱解的极值原理 $\Longrightarrow \underline{u} = u_0 \leqslant u_1 \leqslant \cdots \leqslant u_k \leqslant u_{k+1} \leqslant \cdots \leqslant \bar{u}$, 即存在 $\{u_k\}$ 单调递增

$$\int \nabla v \nabla \underline{u} \mathrm{d}x \leqslant \int_U f(\underline{u}) v \mathrm{d}x, \forall v \geqslant 0, v \in H_0^1(U)$$

找 u_1：$-\Delta u_1 + \lambda u_1 = f(u_0) + \lambda u_0, u_1\big|_{\partial U} = 0$

由线性方程理论存在唯一解 $u_1 \in H_0^1(U)$

（上下解办法）

下证 $u_0 \leqslant u_1$

弱解定义：$\int DvDu_1 + \lambda u_1 v \mathrm{d}x = \int_U f(u_0)v + \lambda u_0 v \mathrm{d}x$

相减得,$\int_U \nabla u \nabla (u_0 - u_1) \mathrm{d}x \leqslant \int_U \lambda v(u_1 - u_0) \mathrm{d}x$

令 $v = (u_0 - u_1)^+$

$$\int_{U^+} [|\nabla (u_0 - u_1)|^2 + \lambda (u_0 - u_1)^2] \mathrm{d}x \leqslant 0$$

$u_0 \leqslant u_1$

类似 $-\Delta u_{k+1} + \lambda u_{k+1} = f(u_k) + \lambda u_k$, 已知 u_k

同理（这里要用到 $f(t) + \lambda t$ 单调递增）可知 $u_k \leqslant u_{k+1}$.

$$\begin{cases} -\Delta u_k + \lambda u_k = f(u_{k-1}) + \lambda u_{k-1} \\ u_k \end{cases}$$

$$\int_U [\nabla u_k \nabla v + \lambda u_k v] \mathrm{d}x = \int_U (f(u_{k-1}) + \lambda u_{k-1}) v \mathrm{d}x, v \geqslant 0, v \in H_0^1(U)$$

$$\int_U [\nabla u_{k+1}\nabla v + \lambda u_{k+1} v]\,\mathrm{d}x = \int_U [f(u_k) + \lambda u_k]\, v\mathrm{d}x$$

$$\int_U [\nabla(u_k - u_{k+1})\nabla v + \lambda(u_k - u_{k+1})v]\,\mathrm{d}x = \int_U [f(u_{k-1} + \lambda u_{k-1}) - (f(u_k) + \lambda u_k)]\, v\mathrm{d}x$$

现要证 $u_k \leqslant \bar{u} \Longrightarrow u_{k+1} \leqslant \bar{u}$

$$\int_U \nabla\bar{u}\nabla v\mathrm{d}x \geqslant \int_U f(\bar{u})v\mathrm{d}x, \forall v \geqslant\in H_0^1(U)$$

$$\int_U [\nabla(u_{k+1-\bar{u}})\nabla v + \lambda u_{k+1} v]\,\mathrm{d}x \leqslant \int_U [f(u_k) + \lambda u_k - f(\bar{u})]\, v\mathrm{d}x$$

(2) $\underline{u}, \bar{u} \in H^1(U)$,

□

4.8.3 应用

1 小时 37 分 8 秒

4.9 Hilbert-Schmidt 定理

5 月 12 日 1 分 51 秒, 内容提要

- 特征值、特征函数
  - 自然：$[0,1]$ 上的 Fourier 级数展开：$\sin n\pi x, \cos n\pi x$
    问题：$[0,1] \to$ 有界区域, 是否有完备正交系？
    如果有, 任一函数都可以做 Fourier 展开.
    办法：有界区域上配上一个对称椭圆算子.（zgq 定理 4.4.7Hilbert-Schmidt 定理）
  - 5 月 12 日 7 分 53 秒
    抛物方程：$u_t = \Delta u$
    双曲方程：$u_{tt} = \Delta u$
    回忆正交系用处：近似计算

5 月 12 日 18 分 23 秒, 抄定理

定理 4.9.1.

注记. *SL 定理, 有条件, 给定边值条件保证算子对称.*
Hilbert-Schmidt 定理是 Sturm-Liouville 型定理的推广.

$Lu = -\sum (a_{ij(x)}u_i)_j$
$\begin{cases} Lu = f \\ u = 0 \end{cases}$
令 $u = Sf = L^{-1}f$
$S\colon L^2(U) \to L^2(U)$, 断言 S 是紧对称算子.

对称

$$(Sf, g)_{L^2} = (f, Sg)$$

证明.

1. 由定理 4.4.7 知, 对任一 $u \in L^2(U)$,$\|u\|^2_{L^2(U)} = 1$, 存在 d_k, 使得 $u = \sum\limits_{k=1}^{\infty} d_k w_k$, 这里 $w_k \in L^2(U)$ 为 S 对应的完备正交系
   $d_k = (u, w_k), 1 = \|u\|^2_{L^2(U)} = \sum\limits_{k=1}^{\infty} d_k^2$
   $Lw_k = \lambda_k w_k$, 所以 $w_k \in H_0^1(U)$
   在 H_0^1 中引进等价范数,$\|u\|^2_{H_0^1(U)} \int_U a_{ij}(x) u_i u_j \mathrm{d}x$
   断言 w_k 为 H_0^1 中的完备正交系.

□

4.10 弱解的 L^∞ 估计（Moser 迭代）

回忆：

- 经典意义下

  最大值原理,$\begin{cases} \Delta u = f & x\in U \\ u=\varphi & x\in \partial U \end{cases}$,$\Phi = \dfrac{F(|x|^2-d^2)}{2n}$,$G=\dfrac{|x|^2}{2n}\pm|\varphi|_{C_0}$

  $a_{ij}u_{ij}$

- 弱解意义下

注记. *1957-62,Degiorgi,nash,moser*

$-(a_{ij}u_i)_j = f, u\in W_0^{1,2}(U)$
办法：分部积分
找测试函数
经验：$\xi^2 u$ 做近边与内部的梯度估计, 即能量估计, 相当于同乘 u
$\Delta_k^{-h}(\xi^2\Delta_k^h u)$,$D^2u$ 的 L^2 内估计, 相当于同乘 u_{kk}
方程求导后,$-\Delta u_i = f_i$,Du 的 L^∞ 估计
$-(a_{ij}u_i)_j = 0$,$u\in W_0^{1,2}(U)$ 为其弱解,$a_{ij}\in L^\infty$, $\lambda|\xi|^2\leqslant a_{ij}\xi_i\xi_j\leqslant\Lambda|\xi|^2$
目的：sup

为什么要讲 L^∞ 估计

命题 4.10.1. $\Phi(s)\in C_{loc}^{0,1}(\mathbb{R})$, 凸函数

(1) 若 u 为

证明. 令 $\Phi\in C_{loc}^2(\mathbb{R})$,$\Phi'(s)\geqslant 0$,$\Phi''(s)\geqslant 0$,$v=\Phi(u)$,$\forall\varphi\in C_0^\infty(U)$,$\varphi\geqslant 0$

$$0\geqslant\int a^{ij}D_ivD_i\varphi\mathrm{d}x = \int a_{ij}\Phi'(u)u_i\varphi_{ij}\int a_{ij}(\Phi'(u)\varphi)_ju_i - \Phi''(u)a_{ij}u_iu_j\varphi\mathrm{d}x$$ □

作业 4.10.2. 证明上述命题

分析：$-(a_{ij}u_i)_j = 0$

4.11 Stampacchia 迭代

结论：$\left\{ \ \ldots \right.$
$n \geqslant 2$,$U \subset \mathbb{R}^n$ 有界区域, 简单 $0 \leqslant a(x) \leqslant \Lambda$
$f_0 \in L^q, \dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{n}, f_i \in L^p(U)$,$p > n > 2$, 则 $u^+ \leqslant C\left(\|f_0\|_{q,U} + \|f\|_{p,U}\right)$

作业 4.11.1. 内容...

推论 4.11.2. 如 u 为方程 $-\sum_{ij}(a_{ij}(x)u_i)_j + a(x)u = f_0 + \sum \dfrac{\partial f}{\partial x_i}, u \in H_0^1(U)$
则 $u \in L^\infty(U)$ 且 $\|u\|_{L^\infty} \leqslant C\left(\|f_0\|_q + \|f\|_p\right)|U|^{\frac{1}{n}-\frac{1}{p}}$

引理 4.11.3. Φ: $[0, +\infty] \to \mathbb{R}^+$ 非增函数,

$$\Phi(h) \leqslant \left(\frac{c}{h-k}\right)^\alpha \Phi(k)^\beta, h > k$$

如 $\beta > 1$, 则 $\Phi(d) = 0, d = C\Phi(0)^{\frac{\beta-1}{\alpha}} 2^{\frac{\beta}{\beta-1}}$

证明. 内容... □

$\Phi(h) = |\{x \in U \mid u(x) > h\}|$
$\Phi(h) \leqslant C\left[\dfrac{\|f_0\|_q + \|f\|_p}{h-k}\right]^{p'^*} \Phi(k)^{p'^*(\frac{2}{p'}-1)}$
只须证

$$\|F_k(u)\|_{p'^*} \leqslant c_0\left(\|f_0\|_q + \|f\|_p\right)\Phi^{\frac{1}{p'}-1}$$

Chapter 5

抛物与双曲方程

前情回顾与内容提要

- Moser 迭代（ch5 第 17 题,$u \in H_0^1(U)F'(t)$ 有界,$F(u) \in H_0^1(U)$）

  $\xi^2(u+)^{p-1}$

- Stampacchia 迭代,De Giorgi 迭代

  前者只需要用 Sobolev 不等式 +Holder 不等式 + 弱解定义,$\varphi = (u-k)^+$

  后者要用到等周不等式 +Sobolev+Holder（但等周不等式与 Sobolev 等价）

- 抛物方程

  $Lu = -\sum(a_{ij}u_i)_j + b_iu_i + cu$

  $u_t + Lu = f$

  $u|_{t=0} = g$

  弱解定义

  能量估计

存在性定理, 函数项级数收敛到解.

定义 5.0.1. $\begin{cases} u_t + Lu = f \\ u\big|_{t=0} = g \\ u\big|_{\partial U} = 0 \end{cases}$

$Lu = -\sum(a_{ij}u_i)_j + b_iu_i + cu$

$a_{ij}, b_i, c \in L^\infty(U_T), U_T = U \times (0,T)$

$f \in L^2(U_T), g \in L^2(U)$

$U \subset \mathbb{R}^n$ 有界区域

$a^{ij} = a^{ji}, a_{ij}\xi_i\xi_j \geqslant \theta|\xi|^2$

$B(u,v,t) = \displaystyle\int_U a_{ij}u_iv_j + b_iu_iv + cuv\mathrm{d}x, \forall\, u,v \in H_0^1(U), 0 \leqslant t \leqslant T$ 称 $u \in L^2((0,T);H_0^1(U)), u' \in L^2(0,,T;H^{-1}(U))$ 为方程 (1) 的弱解, 如果

(1)

$L^2(0,T;H_0^1(U))$, 对于几乎处处的 $t\in[0,T]$,$u(0,t)\in H_0^1(U)$,$\int_0^T \|u\|_{H_0^1(U)}^2\mathrm{d}t<+\infty$

$u'\in L^2(0,T,H^{-1}(U))$,$H^{-1}(U)$ 为 $H_0^1(U)$ 上有界线性泛函

要证明存在唯一性

第一步, 近似解存在

第二步, 近似解收敛到弱解

第三步, 弱解唯一性

近似解,$w_k(x)\in L^2(U)$ 为相对于 $-\Delta$ 的完备正交系也为 $H_0^1(U)$

令 $u_m(x,t)=\sum_{k=1}^m d_m^k(t)w_k(x), d_m^k(0)=(g,w_k),(u_m',w_k)+B(u_m,w_k;t)$

5.1 弱解的存在唯一性

5.2 极值原理与 Harnack 不等式

5.2.1 弱极值原理

5.2.2 Harnack 不等式

5.2.3 强极值原理

5.3 双曲方程的有限传播速度

5.4 弱解的存在唯一性、高阶估计

Chapter 6

习题课

6.1 第一次习题课 2.27 Variational principle

参考：Evans 2.2.6 Energy method

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{in } \Omega \\ u = g & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

$$I[u] = \int_\Omega \left(\frac{1}{2}|\nabla u|^2 - fu \right) \mathrm{d}x$$

$$\mathcal{A} = \left\{ u \in C^2(\Omega) \cap^0 \left(\overline{\Omega}\right) \mid u = g\text{on}\partial\Omega \right\}$$

任意 $\varphi \in C_0^\infty(\Omega), \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big|_{t=0} I[u + t\varphi] = \int_\Omega (-\Delta u - f)\varphi \mathrm{d}x = 0 \Longrightarrow -\Delta u = f.$

引理 6.1.1. *$u \in C^0(\Omega)$, 任意 $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$,*

$$\int_\Omega u\varphi \mathrm{d}x = 0 \Longrightarrow u \equiv 0 in \Omega$$

证明. Elementary analysis. □

Dirichlet problem

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } \Omega \\ u = g & \text{on} \partial\Omega \end{cases}$$

Neumann problem

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = g & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

Robin problem

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} + \alpha(x)u = g & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

注记. *Neumann* 问题的解加一个常数仍是解, 因此我们常另加

$$\int_\Omega u\mathrm{d}x = 0$$

使得解唯一.

1.Find appropriate admissible function space $\mathcal{A}$ and functional $I[\cdot]$ for the Neumann and Robin problem.

证明.

- $$I[u] = \int_\Omega \left(\frac{1}{2}|\nabla u|^2 - uf\right)\mathrm{d}x$$
$$\mathcal{A}_D = \left\{u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega}) \mid u = g\right\}$$

  $\Longleftarrow$ If u is critical point of $I[\cdot]$, then $-\Delta u = f$

  $\Longrightarrow$ If u is a solution to Dirichlet problem,

  $\forall v \in \mathcal{A}_D, I[u] \leqslant I[v]$?

$$\begin{aligned} \int_\Omega \langle \nabla u, \nabla(u-v)\rangle &= \int_\Omega -(u-v)\Delta u \\ &\xlongequal{-\Delta u = f} \int_{\Omega f u} - \int_{\Omega f v} \\ \int_\Omega \langle \nabla u, \nabla(u-v)\rangle &= \int_\Omega |\nabla u|^2 - \int_\Omega \langle \nabla u, \nabla v\rangle \\ &\geqslant \int_\Omega \frac{1}{2}|\nabla u|^2 - \int \frac{1}{2}|\nabla v|^2 \\ &\Longrightarrow I[u] \leqslant I[v] \end{aligned}$$

- $$\mathcal{A}_N = \left\{u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})\right\}$$

  $0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big|_{t=0} J(u+t\varphi), \forall \varphi \in W_0^{1,2}(U)$

  $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{1}{2}\int_U |D(u_k) + tD\varphi|^2\mathrm{d}x + \int_U f(u+t\varphi)\mathrm{d}x\right]\big|_{t=0}$

  $= \int \nabla u \nabla \varphi \mathrm{d}x + \int_U f\varphi\mathrm{d}x$ □

2.Find the Euler-Lagrange equation for the following variation problem:$\mathcal{A} = \left\{c \in C^2(\Omega) \mid u = 0 \text{ on } \partial B_2(0)\right\}, \Omega = B_2(0)\backslash\overline{B_1(0)} \subset \mathbb{R}^n$,

$$I[u] = \int_\Omega (|\nabla u|^2 + 2u)\mathrm{d}x + \int_{\partial B_1(0)} u^2 \mathrm{d}A.$$

证明. □

3.

(1) Suppose:$u\colon U\to\mathbb{R}$ is a minimizer of the area funcional

$$I[u]=\int_U\sqrt{1+|\nabla u|^2},\mathcal{A}=\left\{u\in C^2(U)\cap C(\overline{U})\mid\int_U u=1,u=g\text{ on }\partial U\right\},U\subset\mathbb{R}^2.$$

Prove that Graph u is a surface of constant mean curvature.

(2) Suppose that u is a solution of $\operatorname{div}\left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}\right)=0$ in $U\subset\mathbb{R}^2$,then for any surface $\Sigma\subset U\times\mathbb{R},\partial\Sigma=\partial\mathrm{Graph}u$, then

$$Area(Graph_u)\leqslant Area(\Sigma).$$

证明. $\varphi\in C_0^\infty(\Omega)$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0}I[u+t\varphi]&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0}\int_\Omega\sqrt{1+|\nabla u+t\nabla\varphi|^2}\\&=\int_\Omega\frac{\langle\nabla u,\nabla\varphi\rangle}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}\\&=\int_\Omega\left\langle\frac{\nabla u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}},\nabla\varphi\right\rangle\\&=-\int_\Omega\varphi\operatorname{div}\left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}\right)\end{aligned}$$

(1) $\forall\lambda\in\mathbb{R}$,

$$E[u]=\int_\Omega(\sqrt{1+|\nabla u|^2}+\lambda u)\mathrm{d}x=I[u]+\lambda$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0}E[u+t\varphi]=\int-\operatorname{div}\left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}\right)$$

(2) $N_1=\dfrac{(-u_x,-u_y,1)}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}$

$$\int_M\operatorname{div}N_1=\int_{Graph_u}\langle N_1,N_1\rangle-\int_\Sigma\langle N_1,N_2\rangle$$

$$\operatorname{div}_{\mathbb{R}^3}\left(\frac{(-u_x,-u_y,1)}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}\right)=\operatorname{div}\left(-\frac{\nabla u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}\right)=0$$

□

4. Suppose (M,g) to be a Riemannian manifold,$g=g_{ij}\mathrm{d}x^i\otimes\mathrm{d}x^j$ in local coordinates. Calculate the:

(1) geodesic equation(the Euler-Lagrange equation of the variational problem:$I[\gamma]=\frac{1}{2}\int_a^b(g_{ij}\circ\gamma)\dot{x}^i(t)\dot{x}^j(t)\mathrm{d}t$.)

$$\mathcal{A}=\{\gamma:[a,b]\to M\ \text{ to be a smooth curve}\}.$$

In local coordinate (U,φ,V),$\varphi(\gamma(t))=(x^1(t),x^2(t),\cdots,x^n(t))$.

(2) Suppose (N, h) to be another Riemannian manifold, calculate the harmonic map equation(the Euler-Lagrange equation of the variational problem:$I[f] = \frac{1}{2}\int_M g^{ij}\frac{\partial f^\alpha}{\partial x^i}\frac{\partial f^\beta}{\partial x^j}h_{\alpha\beta}\circ f\sqrt{\det[g_{ij}]}\mathrm{d}x^1\wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^n$)

$\mathcal{A} = \{f : M \to N \text{ to be a smooth map}\}$.

(3) What is the relationship between the geodesic equation and the harmonic map equation?

证明. (1) $l(\gamma) = \int_a^b |\dot\gamma| \Longleftrightarrow E(\gamma) = \frac{1}{2}\int_a^b \langle\dot\gamma, \dot\gamma\rangle = \frac{1}{2}\int_a^b \dot x^i(t)\dot x^j(t)g_{ij}\mathrm{d}t$

可以利用单位分解把问题化归到一个邻域中

$$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0}$$

□

6.2 第二次习题课

6.2.1 椭圆方程的 Harnack 不等式

6.3 第四次习题课

6.3.1 作业 1

6.3.2 作业 2

6.3.3 作业 3

6.3.4 Hadamard 三圆定理

6.3.5 Pohozaev 恒等式

参考 evans553 页到 554 页

6.3.6 活动标架法

6.3.7 补充习题

Chapter 7

一些总结

7.1 $(-\Delta)^{-1}$

4 月 7 日 7 分 33 秒——33 分 23 秒

回忆：有界数列有收敛子列

连续函数空间中一致有界 + 等度连续 $\Longrightarrow$ 有收敛子列

泛函分析：紧性 $G\colon L^2(U)\to L^2(U)$ 有界线性算子, 如何得到 G 为紧算子？

Riesz-Shauder 理论

Hilbert-Schmidt：得到完备正交系

Fredholm 二择一：Banach 空间版本（zgq 第四章第一节）和 Hilber 空间版本（Evans 附录）

具体例子：$L=(-\Delta)^{-1}\colon L^2(U)\to L^2(U)$

没有内积分部积分用不来

$$\begin{cases} -\Delta u = f\in L^2(U) \\ u\big|_{\partial U}=0 \end{cases}$$

$L=(-\Delta)^{-1}\colon f\to u, L^2(U)\to L^2(U)$

L 有界线性算子

$u\in W_0^{1,2}(U)$

$\|u\|_{L^2(U)}\leqslant c_{n,U}\|Du\|_{L^2(U)}$ 上节 Poincare 不等式（蕴含 L 有界且紧）

u 为方程之解是指任意 $\varphi\in W_0^{1,2}(U)$ 有 $\displaystyle\int_U \nabla u\nabla\varphi \mathrm{d}x=\int_U f\varphi \mathrm{d}x$

取 $\varphi=u$, 那么 $\displaystyle\int_U |\nabla u|^2\mathrm{d}x=\int fu\mathrm{d}x\leqslant \|f\|_{L^2}\|u\|_{L^2}\leqslant c\|f\|_{L^2}\|\nabla u\|_{L^2}$

$\|Du\|^2_{L^2(U)}\leqslant \dfrac{1}{2}\|\nabla u\|^2_{L^2(U)}+c_0\|f\|^2_{L^2(U)}$

$\|Du\|_{L^2(U)}\leqslant c_0\|f\|_{L^2(U)}$

$\|u\|_{W^{1,2}(U)}\leqslant c_0\|f\|_{L^2(U)}$

$u:=(-\Delta)^{-1}f$

$(-\Delta u)^{-1}\colon f\to u, L^2(U)\to W_0^{1,2}(U)$

我们要证明,$W_0^{1,2}\hookrightarrow L^2(U)$ 紧嵌入

从而 $(-\Delta)^{-1}\colon L^2(U)\to L^2(U)$ 是紧算子.

上节课讲了 $W_0^{1,p}$ 情形下的 Poincare 不等式, 现在做到 $W^{1,p}(U)$
差商：求导运算的积分版本

$$\begin{cases} \Delta u = f \in L^2(U) \\ u\big|_{\partial U} = 0 \end{cases}$$

上节课知道存在唯一 $u \in W_0^{1,2}$, 学了差商立刻知道 $u \in W_{loc}^{2,2}(U')$

附录 A

不等式

A.1 初等不等式

命题 A.1.1.

命题 A.1.2 (Young)**.**

A.2 Jensen 不等式

A.3 Young 乘积不等式

命题 A.3.1. 设 $p,q>1$ 满足 $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$. 那么对于 $a\geqslant 0$ 和 $b\geqslant 0$ 有

$$ab\leqslant\frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q},$$

等号成立当且仅当 $a^p=b^q$.

证明. $\ln\left(\dfrac{a^p}{p}+\dfrac{b^q}{q}\right)\geqslant\dfrac{\ln a^p}{p}+\dfrac{\ln b^q}{q}=\ln ab.$ □

A.4 Hölder 不等式

命题 A.4.1. 设 $1 \leqslant p, q \leqslant \infty$ 满足 $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. 那么对任意 $f \in L^p(U)$ 和 $g \in L^q(U)$ 有

$$\|fg\|_{L^1(U)} \leqslant \|f\|_{L^p(U)} \|g\|_{L^q(U)}.$$

命题 A.4.2. 设 $1 \leqslant p_1, \cdots, p_m \leqslant \infty$ 满足

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_1} + \cdots + \frac{1}{p_m} = 1,$$

那么对于任意 $u_i \in L^{p_k}(U)$, 满足

$$\int_U |u_1 \cdots u_m| \mathrm{d}x \leqslant \prod_{k=1}^{m} \|u_k\|_{L^{p^k}(U)}.$$

命题 A.4.3.

附录 B

实分析